

النظرية والتطبيق
Theory and Applications

أ.د. مجدى الطويل

الأستاذ بقسم الرياضيات الهندسية

كلية الهندسة – جامعة القاهرة

تقديم

بقلم أ.د. عاصم ضيف

لايسع القارئ لكتاب الدكتور مجدي الطويل إلا أن يندهش من هذا المجهود العظيم الذي قام به في تأليف هذا الكتاب .. فالأخير يُعد تجزبة رائدة وفريدة في هذا المجال لأنه أول كتاب باللغة العربية يُحيط بالعلم هذه الإحاطة الكاملة . والمؤلف بذلك يُلبي مطلب التعريب ويستجيب للدعوة في ترجمة العلم لكي يصير عربياً فيدخل في نسيج الثقافة العربية لكي تعم فائدته الحقيقية . ويتضح منذ الوهلة الأولى أن المؤلف بذل مجهوداً كبيراً في ترجمة المصطلحات العلمية الغربية بحيث تُعبر عن المعنى بوضوحٍ كامل ؛ كما نحت مصطلحات أُسوةً بالنحت الغربي .. ولم يكن وارداً هذا من قبل لمترجمي المصطلحات العلمية .

وبجانب تصدي الكاتب للموضوع بأسلوبٍ بارع وعرضٍ مُشوق ومعالجة ممتازة للعلم ؛ فإن الكتاب غني بالأمثلة والمسائل حتى يُساعد القارئ علىَ تمثل الموضوع .. وهو بذلك يتفوق على كثيرٍ من الكتب الغربية التي تجعل القارئ يُحاول فيها بمفرده مما يُعرضه للفشل في الفهم ؛ ولكن هنا فإن المؤلف يرسم للقارئ أسلوب الحل كي تتضح الرؤيا في الإثبات العلمي وجوانبه للقارئ ثم هو يجمع له مسائل كثيرة في آخر الفصول تدريباً له فيما بعد .

وينقسم الكتاب إلى خمسة أبواب يبدأ من التعريفات الأولية وهي الطريقة المفضلة لدى الكثير من الرياضيين بدلاً من البدء بالمعادلات الخطية مباشرةً مما يُسهل للقارئ تتبع الموضوع فيما بعد التعرف على المقومات الأساسية لعلم المصفوفات . ويعرض هذا الباب للدوال القياسية مثل الأثر والمحددة والمقياس ويُعد هذا الباب مرجعاً في حد ذاته . ويتناول الباب الثاني نظرية المعادلات الخطية وطرق حلها سواء الطرق المباشرة أو التكرارية ، وهو باب شامل لأنه ألم بجميع الطرق المهمة وقلما يجده القارئ مُسهباً في الكتب الغربية خصوصاً الحالات المختلفة لوجود الحل وعددها ، وسيُعجب

القارئ حتماً بالجدول البسيط الذي رسمه المؤلف له ليساعده على تتبع الحالة التي تهم القارئ . أما الباب الثالث الخاص بالقيم الذاتية لمصفوفة فهو في اعتقادنا أهم باب في الكتاب ؛ فهو شامل وواف عن الموضوع لأنه تقدمة للأجزاء التي تليه خصوصاً أن المؤلف ضمنه طرقاً عددية لا فقط الدراسة النظرية وهو في رأينا أهم أبواب الكتاب . ويعرض الباب الرابع للدوال المصفوفية بجميع صورها وأنواعها .. ولا شك أنه أخذ من المؤلف مجهوداً كبيراً لأن القارئ سيجده وافياً نافعاً إذا أراد حساب أي دالة جبرية أو متسامية لمصفوفة ، وقليل جداً من الكتب الغربية التي تُسهب في هذا الموضوع لصعوبته .. ولكن المؤلف تصدى له بطريقتين سواء الاستقطار أو نظرية هاملتون - كايلي بحيث لا نتصور أي دالة لمصفوفة لا يمكن الحصول عليها بمنتهى السهولة . أما الباب الأخير فهو نهاية الأرب حيث تتضح الطرق السابقة في معالجة مسائل بعينها أهمها المعادلات التفاضلية سواء بالمعاملات الثابتة والمتغيرة والصور الشائعة منها ودقة الحلول العددية . وهناك تطبيقات أخرى لا تنتهي لنظرية المصفوفات .. لذلك كنا نرجو أن يُسهب المؤلف في تتبع التطبيقات المختلفة كي يكون الكتاب مفيداً جداً للمهندسين والتطبيقيين وهو مطلب طموح كي يفي الكتاب بالأغراض المتنوعة للقراء ذوي الاتجاهات المختلفة .

وفي رأينا أن كتاب الدكتور مجدي الطويل سيُسعد القراء بفائدته الجمة وسعدت جداً لمطالعته ومن المؤكد أنه سيظل هو المرجع الأساسي للعلم باللغة العربية لسنين طويلة وزاداً للقارئ المهتم بتطبيقات المصفوفات المتنوعة وهو يملأ فراغاً في المكتبة العربية التي طالما احتاجت إليه .

عاصم ضيف
أستاذ الرياضيات بهندسة القاهرة
القاهرة ١٤١٧ هـ - ١٩٩٦ م

مقدمة المؤلف

هذا الكتاب هو ثمرة غرس طيب منذ دخول المؤلف كلية الهندسة – جامعة القاهرة . في البداية كانت مهارات فك المحدد مع أستاذنا الدكتور فؤاد رجب .. ثم مادة المصفوفات بعمقها مع الأستاذ الدكتور عاصم ضيف والذي خدم المكتبة العالمية بكتابه الممتع الغزير *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers* والذي كان يؤلفه آنذاك ويُعطيني بروفاته كمادة علمية لمادة " المصفوفات المتقدمة " التي درستها منفرداً في الدراسات العليا عام ١٩٨١ .. ويالها من متعة أن تأخذ العلم من محترفٍ هاوٍ أو هاوٍ محترف .. وتزامن مع هذا التاريخ تلمذتي على يد الأستاذ الدكتور رشدي عامر وأنا واحد من هذا الجيل السعيد الذي نما في قسم الرياضيات الهندسية ورشدنا العامر هو الرئيس لمجلس القسم .. هذه الصحبة من الأساتذة الكبار حببتنا في العلم بشكلٍ عام وفي التحليل العددي والمصفوفات بشكلٍ خاص وجعلت لنا في المصفوفات والتحليل العددي مهارة تكاد تكون فطرية تُخرج كنوزها الدفينة عند حل المشاكل الرياضية بشكلٍ عام . وأحمل لهؤلاء الرواد في تخصصاتهم عرفاناً لا ينقطع بالجميل .. وتكون من دواعي سروري الدائم تذكرهم لي .. فمابالك بالتمتع بدفء أبونهم وأخوتهم الحانية .

من يوم أن تعرفت على المصفوفات شُغفت بها وأصبح لها عندي فهرست منظم من المواضيع والأسئلة والتمارين أعانتني كثيراً على التعامل معها في قاعات الدرس وأنا أتدرج في سلم الترقي من معيد إلى أستاذ .. وقد نما هذا الكتاب من مذكرة إلى باب في كتاب شامل يحتوي على مواضيع متعددة في الرياضيات بالمشاركة مع زملاء آخرين .. إلى أن أصبح كتاباً منفرداً ينقسم إلى أبواب وفصول .. وقد عانيت في تأليفه الكثير لأني وضعت له نظرة عامة كان يجب عليّ أن ألتزم بها وتتلخص في التدرج مع القارئ من أيسر المفاهيم إلى ماأجده الآن مناسباً .. ولكن لن أجده كذلك مستقبلاً .. وذلك لأن علم المصفوفات مازال به الكثير جداً الذي لم يتم تناوله في هذا الكتاب .. ولكن يجب أن يكون لنا سقفاً ما .. ناهيك أن يكون لنا أرضاً نقف عليها .. وهو بالتالي كتاب متوسط المستوى يمكن الاستعانة به في مقرر لطلبة كليات العلوم والهندسة .. وأحياناً لطلبة الدراسات

العليا في بعض التخصصات الهندسية التي لا تتطلب عُمقاً واسعاً – أوسع من محتوى الكتاب – في مادة المصفوفات وتطبيقاتها المتشعبة .. ولذلك فالأبواب الثلاثة الأولى من الكتاب بها تفصيلات كثيرة وتمرينات محلولة متعددة وبعض المسائل في نهاية كل باب حتى تصل بالقارئ المبتدئ إلى المستوى التقني المطلوب في هذه المادة .. ثم يأتي الباب الرابع لِيُناسب طالب المستوى المتقدم وطالب الدراسات العُليا في بعض التخصصات الهندسية والعلمية .. والباب الأخير هو باب التطبيقات المختلفة لعلم المصفوفات .. وقد راعيت فيه التنوع حتى يُناسب أنواعاً من القراء بين رسومات الحاسب *Computer Graphics* وحل نظم من المعادلات غير الخطية .

ولقد حاولت أن أُقدم الترجمة المعبرة عن المفهوم الإنجليزي دون تأثر بمن سبقني من المؤلفين والمترجمين – والأعمال في هذا قليلة جداً مع الأسف – ولذلك فهناك بعض الحيود عما هو شائع .. وهو حيود مقصود حتى تتعدد ألفاظ الترجمة ويبقى منها ماهو أصلح وأشمل وأيسر .. **فمثلاً** كلمة ***Singular Matrix*** تُرجمت في بعض المراجع على أنها مصفوفة منفردة وهذا لا أميل إليه وأميل إلى استعمال **مصفوفة شاذة** .. كذلك ***Unitary Matrix*** ترجمتها إلى **مصفوفة وحدوية** تمييزاً لها عن **مصفوفة الوحدة** ***Unity Matrix*** .. وهكذا ، أيضاً استعملت النحت العربي لأترجم النحت الإنجليزي ***Orthonormal*** إلى **متوحمدة** .. أي متجهات الوحدة المتعامدة .. وهو لفظ يبدو غريب الاستعمال في البداية ولكنني أظنه أيسر في الاستخدام من الثلاث كلمات التي ينحتها .. ويمكن استعمال " **وَحمِد المتجهات الآتية** " أي إجعلها متجهات وحدة متعامدة ، وطريقة جرام – شميدت في " **الوحمدة** " .. وهكذا يمكن التصرف في الكلمة لتؤدي المعنى في المكان الذي تشغله .. على كلٍ أرجو أن يقبل القارئ ذلك مني بصدرٍ رحب وألا يُعادي اللفظ لغرابته .. ومازال الأمر مفتوحاً في ترجمة العلوم إلى العربية وأن نتفق على ما اتفقنا عليه خيرٌ لنا من الاختلاف على القليل الشاذ حتى تسود ترجمة بعينها تكون هي الأيسر على اللسان والأقرب لصحة اللغة والأشمل للمعنى .

وأوجه شكري العميق إلى أ.د. محمد شمس الدين محمدين وأ.د. عاصم ضيف واللذان قدما لي من المساعدات الكثير لإخراج هذا العمل على صورته هذه . ولا أستطيع أن أكفي الدكتور سعيد سيف الدين – زميلي الفاضل وصديقي العزيز – شكراً على حُسن صنيعه بهذا الكتاب كتابةً ومناقشةً وتصرفاً حسناً .. ولولاه ما خرج هذا الكتاب في هذه الصورة .

وفي النهاية أرجو للدارس وللقارئ رحلة ممتعة مع هذا العلم الذي وصفه بلمان *Bellman* (وهو الأستاذ الكبير في علوم الرياضيات وصاحب كتاب يُعتبر من أعمق الكتب التي كُتبت في المصفوفات حتى الآن) وصفه هذا العالم الكبير بأنه هو حساب الرياضيات العُليا *The Arithmetic of Higher Mathematics* .

د. مجدي الطويل

القاهرة ١٤١٧ هـ - ١٩٩٦ م

وهاهي الطبعة الثانية بين يدي القارئ بعد أن تم تصويب الأخطاء اليسيرة التي وجدناها أثناء تدريسه .. ولقد لاقى الكتاب قبولاً حسناً لدى الباحثين والدارسين في الدراسات العُليا ودراسات البكالوريوس وأحمد الله على ذلك وأرجو أن أتمكن قريباً من زيادة أبوابه وإضافة الكثير من التمارين إليه وإني لأشكر القارئ الذي يتصل بي شخصياً من أجل النقد البناء الذي يجعل فائدة هذا الكتاب كثمرة شهية في وقت الحصاد .

أ. د. **مجدي الطويل**

القاهرة ١٤٢٠ هـ - ١٩٩٩ م

المحتويات
CONTENTS

صفحة

صفحة

صفحة

صفحة

صفحة

صفحة

الباب الأول

مقدمة في المصفوفات
INTRODUCTION TO MATRICES

في هذا الباب نقدم تعريفاً (أرجو أن يكون وافياً) لكل الأساسيات التي نحتاجها لسبر أغوار علم المصفوفات *Matrices* وهو علم قائم بذاته وله نتائجه التي تميزه عن بقية العلوم .. فالمصفوفة لها دور هام في حل المعادلات الخطية *Linear Equations* (وغير الخطية) ؛ ولذلك يجب أن نستكشف المعكوس *Inverse* والدرجة *Rank* وأن نحدد المقاييس *Norms* التي تخص المصفوفة والمتجه *Vector* ؛ وعلينا أن نعرف أنواعاً من المصفوفات تلعب دوراً هاماً في التحليل وبالأخص المصفوفات المتماثلة *Symmetric Matrices* والمصفوفات الهيرميتية *Hermitian Matrices* وعلينا أن نحلل خواص ما يُسمى بالمحددات *Determinants* وعمليات الضرب البينية *Inner Product* ومواضيع أخرى كثيرة نستخدمها في هذا الباب .. وعلى القارئ أن يبذل مجهوداً طيباً في فهم الموضوع وحل التمارين في آخر الباب حتى يمهد نفسه بمعلومات قيمة هي الأساس لما يتلوه من أبواب .

١-١ تعريف المصفوفة *A MATRIX DEFINITION*

يوجد أكثر من طريقة لتعريف المصفوفة .. أسهل هذه التعاريف هي ما وجدته في [*Wylie*, 1975] حيث لا يعتمد على خلفية من علم الجبر الخطي *Linear Algebra* :

تعريف المصفوفة :

المصفوفة من رتبة $m \times n$ (*m by n*) هي ترتيب مستطيل لكميات تنتمي إلى حقلٍ ما *Field* في m من الصفوف *Rows* و n من الأعمدة *Columns* وعادةً ما تُكتب المصفوفة بالحروف الكبيرة *Capital Letters* .. فمثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

أو إختصاراً $A = [a_{ij}]$

حيث a_{ij} هو عنصر *Element* المصفوفة *A* الواقـــع في الصـــف *I* والعمود *J* $(1 \le i \le n, 1 \le j \le m)$.

وتُسمى المصفوفة المكونة من صفٍ واحد بالصف *Row Matrix or Row* ، وتُسمي المصفوفة المكونة مـــن عمـــودٍ واحـــد بـــالعمود *Coulmn Matrix or Column* ، وعادةً ما تُطلق التسمية *a Vector* على الصف أو العمود .

وفي حالة تساوي عدد الأعمدة مع عدد الصفوف $(m = n)$ فـــإن المصفوفة تُسمى بالمصفوفـــة المربعـــة *a Square Matrix* وتُســـمى العناصر a_{ii} $(i = 1,2,\cdots,n)$ في المصفوفة المربعة بـــالقطر الرئيســـي *Principal Diagonal or Diagonal* .

١-٢ أساسيات *BASICS*

١-٢-١ مصفوفة الوحدة *Unity Matrix I*

وهي مصفوفة مربعة تكون عناصر قطرها دائماً الوحدة (= 1) أما العناصر غير القطرية فتكون أصفاراً .. أي أن ؛

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \quad , \quad i = 1,2,\cdots,n \\ 0 & , \quad i \ne j \end{cases}$$

وعلى ذلك فإن :

$$I_1 = [1] = 1 \quad , \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \cdots$$

وهكذا . كذلك فإن المتجه :

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

في المصفوفة الثنائية تُسمى بالمتجهات الأولية *Elementary Vectors* للفراغ الثنائي *Two Dimensional Space* . وأيضاً تُسمى المتجهات :

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad ، \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

بالمتجهات الأولية في الفراغ الثلاثي الأبعاد *Three Dimensional Space* . وعلى ذلك فالمتجه :

$$\begin{bmatrix}1\\0\\ \\0\end{bmatrix}_{n\times 1}$$

هو متجه أولي في الفراغ ذي *n* من الأبعاد *n Dimensional Space* وهو فراغ لا يمكن رسمه في الجبر المجرد ويلعب دوراً هاماً في التحليل الرياضي بشكلٍ عام .

ورغم أننا لم نعرف بعد ضرب المصفوفات ، إلا أننا نجد أنفسنا مضطرين لذكر خواص هامة لمصفوفة الوحدة كالآتي :

$$\boxed{I_{n\times n}A_{n\times m} = A_{n\times m} = A_{n\times m} \times I_{m\times m}}$$

١-٢-٢ المصفوفة الصفرية Null Matrix or Zero Matrix O

وهي المصفوفة التي عناصرها أصفاراً .. أي أن :

$$\boxed{a_{ij} = 0 \quad , \quad \forall\, i, j}$$

ومن أهم خواصها الآتي :

$$\boxed{\begin{array}{lcl} O_{m\times n}A_{n\times l} = O_{m\times l} & , & A_{m\times l}O_{l\times n} = O_{m\times n} \\ A_{m\times n} + O_{m\times n} = A_{m\times n} & \Leftrightarrow & A - A = O \end{array}}$$

وسيأتي تعريف عمليات الضرب ، الجمع والطرح في االمصفوفات لاحقاً .

١-٢-٣ معكوس المصفوفة *Inverse Matrix*

وهي مصفوفة مُستنتجة من A ويُرمز لها بالرمز A^{-1} .. المصفوفة المستطيلة يكون لها مصفوفتان عكسيتان ؛ واحدة من اليمين وتُسمى المعكوس الأيمن *Right Inverse* A_r وتحقق الآتي :

$$A_{m\times n}A^{-1}_{n\times m} = I_{m\times m}$$

وواحدة من اليسار وتُسمى المعكوس الأيسر *Left Inverse* A_l وتحقق الآتي :

$$A^{-1}_{n\times m}A_{m\times n} = I_{n\times n}$$

فإذا كانت المصفوفة مربعة $(m = n)$ فإن معكوسها الأيسر يتساوى مع معكوسها الأيمن فيكون للمصفوفة معكوس واحد $A^{-1}_{n\times n}$ يحقق الآتي :

$$A_{n\times n}A^{-1}_{n\times n} = A^{-1}_{n\times n}A_{n\times n} = I_{n\times n}$$

ويمكن القول أن هذا المعكوس يكون موجوداً بشروط سيأتي ذكرها .. وبالنسبة للمصفوفة المربعة فإن الشرط هو أن $|A| \neq 0$ (محدد A لا يساوي الصفر) . وفي هذه الحالة تُسمى A غير شاذة *Nonsingular* . فإذا كان $|A| = 0$ فإن A ليس لها معكوس وتكون A عندئذٍ مصفوفة شاذة *Singular* .. وسيأتي تعريف محدد المصفوفة في نهاية هذا الباب .

١-٢-٤ تساوي مصفوفتين *Equality of Two Matrices*

تتساوى المصفوفتان $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ إذا ما تساوت كل العناصر المتناظرة في المصفوفتين .. أي أن : ·

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad a_{ij} = b_{ij} \quad , \quad \forall\, i, j$$

وعلى هذا ، فلابد (إبتداءً) من تساوي المصفوفتين في الأبعاد .

١-٢-٥ جمع وطرح المصفوفات *Addition and Subtraction of Matrices*

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ فإن :

$$\begin{array}{lll} C = [c_{ij}] = A_{m\times n} + B_{m\times n} & , \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} & , \quad \forall\, i, j \\ D = [d_{ij}] = A_{m\times n} - B_{m\times n} & , \quad d_{ij} = a_{ij} - b_{ij} & , \quad \forall\, i, j \end{array}$$

وعلى هذا فلابد من تساوي A و B في الأبعاد وتكون لـ C و D نفس الأبعاد . وعندما يكون لـ B نفس أبعاد A يُقال لـ B أنها قابلة للجمع على (أو الطرح من) *Conformable for Addition A* (or *Subtraction*) ، وغير ذلك لا تكون قابلة للجمع أو الطرح *Not Conformable for Adiition or Subtraction* .

فمثلاً ، إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 9 & 4 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 10 & 13 & 10 \\ 13 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad , \quad D = A - B = \begin{bmatrix} -4 & -5 & 2 \\ -3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

ويمكن التأكد من صحة القوانين التالية :

(i)	$A + (B + C) = (A + B) + C$
(ii)	$A + B = B + A$
(iii)	$A + O = O + A = A$
(iv)	$A - A = 0$

١-٢-٦ ضرب المصفوفات Matrix Multiplication

إذا كانت $A = A_{n\times m} = [a_{ij}]$ و $B = B_{m\times l} = [b_{ij}]$ فإن :

$$C = C_{n\times l} = [c_{ij}] = A_{n\times m} \cdot B_{m\times l} = A \cdot B \quad , \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad \forall\, i, j$$

وعلى هذا الأساس فإن B تكون قابلة للضرب في A من اليسار *Conformable for Multiplication from Left* إذا ما كان عدد أعمدة A مساوياً لعدد صفوف B . وضرب المصفوفات يتغير تبعاً للإتجاه .. فهناك ضرب من اليمين وضرب من اليسار . وعامةً فإن الضرب من اليسار يُنتج مصفوفة مختلفة عن الضرب من اليمين (إذا أمكن ذلك) .

فمثلاً ، إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$C = C_{2\times1} = A_{2\times3} \cdot B_{3\times1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(1)+(3)(3)+(6)(4) \\ (5)(1)+(1)(3)+(7)(4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35 \\ 36 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن الضرب $B_{3\times1} \cdot A_{2\times3}$ غير ممكن (لماذا ؟) .

بعض القوانين الهامة :

(i)	$A(B+C) = AB + AC$
(ii)	$(A+B)C = AC + BC$
(iii)	$A(BC) = (AB)C = ABC$
(iv)	$AB \neq BA$ (In general)
(v)	$kA = [ka_{ij}]$
(vi)	$k(A \pm B) = kA \pm kB$
(vii)	$(k_1 \pm k_2)A = k_1A \pm k_2A$
(viii)	$(k_1k_2)A = k_1(k_2A)$
(ix)	$I \cdot A = A \cdot I = A$
(x)	$O \cdot A = A \cdot O = O$

حيث k , k_1 , k_2 ثوابت .

دعنا نثبت (i) . فإذا كانت $A = A_{n\times m} = [a_{ij}]$ ، $B = B_{m\times l} = [b_{ij}]$ و $C = C_{m\times l} = [c_{ij}]$ ،

فإن :

$$(B+C)_{m\times l} = [b_{ij} + c_{ij}]$$

وبالتالي

$$A(B+C) = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}(b_{kj} + c_{kj})\right] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj} + \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}\right]$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right] + \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}\right] = AB + AC$$

وعلى هذا النحو يمكن للقارئ محاولة إثبات بقية القوانين السابقة .

ويجب أن يُلاحظ القارئ هذا الاختلاف الكبير عن ضرب الكميات المقياسية . فـإذا كـان $AB = O$ فهذا ليس معناه أن أيٍ من المصفوفتين A أو B يجب أن تكون مصفوفة صفرية . فمثـلاً ، إذا كانت :

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&2&2\\5&5&5\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}3&4&2\\-2&-1&-1\\-1&-3&-1\end{bmatrix}$$

فإن

$$AB=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=O$$

بالرغم من أن $A \neq O$ وأن $B \neq O$. وأرجو من القارئ تركيب مصفوفات على هذا النحو تُعطي نفس النتيجة كنوعٍ من التمرين ولفت النظر دائماً إلى هذه الحقيقة المغايرة لمفاهيم ضرب الكميات المقياسية التي تعودنا عليها .

١-٢-٧ قسمة المصفوفات *Division of Matrices*

إبتداءً ؛ فإنه لا وجود لقسمة مصفوفة على مصفوفة . فالعملية $\frac{A}{B}$ غير موجودة ولكن إذا ما كانت B^{-1} موجودة فإن العملية AB^{-1} أو $B^{-1}A$ هي المُعرفة في المصفوفات . وعلى هذا الأساس إذا أردنا حل المعادلة $Ax = b$ للمجهول x فإنه إذا كانت A^{-1} موجودة ، فإن $x = A^{-1}b$ وذلك بالضرب (من اليسار) في A^{-1} واستعمال $A^{-1}A = I$.

١-٢-٨ التجزئ *Partitioning*

في حالة الأبعادالكبيرة يمكن تقسيم أو تجزئ المصفوفة إلى مجموعة من المصفوفات الفرعية *Submatrices* ، فمثلاً :

$$A=[a_{ij}] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c|c}A_{11}&A_{12}\\\hline A_{21}&A_{22}\end{array}\right]$$

وكذلك :

$$B=[b_{ij}] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{c|c}B_{11}&B_{12}\\\hline B_{21}&B_{22}\end{array}\right] .$$

ويمكن استعمال هذا في عمليات المصفوفات المختلفة .. فعملية الجمع مثلاً :

$$\boxed{A+B=\left[\begin{array}{c|c}A_{11}+B_{11}&A_{12}+B_{12}\\\hline A_{21}+B_{21}&A_{22}+B_{22}\end{array}\right]}$$

وعملية الضرب تكون كالآتي :

$$AB = \left[\begin{array}{c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{array}\right]$$

وكثيراً ما نلجأ لمثل هذا التجزئ لتسهيل العمل أو إجراء إثبات لبعض النظريات كما سيلي .

١-٢-٩ مُدّور المصفوفة *Matrix Transpose*

إذا كان $A_{n\times m} = [a_{ij}]$ فإن مُدّور المصفوفة هي المصفوفة الناتجة من جعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف .. أي هي المصفوفة

$$A^T_{m\times n} = [a_{ji}]$$

ويجب التنويه هنا أن هذه العملية لا تؤثر في قيمة المحدد (وسيأتي تعريفه لاحقاً) ..أي أن :

$$|B^T| = |B|$$

وذلك للمصفوفة المربعة . كذلك يمكن التأكد من صحةالقوانين التالية :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & (A \pm B)^T = A^T \pm B^T \\ \text{(ii)} & (A^T)^T = A \\ \text{(iii)} & (kA)^T = kA^T \quad , \quad k = \text{scalar} \\ \text{(iv)} & (AB)^T = B^T A^T \end{array}$$

١-٢-١٠ المصفوفة المتماثلة *Symmetric Matrix*

هي تلك المصفوفة (المربعة) التي يتساوى فيها العناصر حول القطر .. أو بشكلٍ آخر هي تلك المصفوفة التي تساوي مُدّورها $(A = A^T)$. وعلى هذا فإن شرط التماثل هو :

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad , \qquad \forall\, i, j$$

وعلى سبيل المثال فإن المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 8 \\ 7 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

فيها يكون $A = A^T$ وبالتالي فهي متماثلة .

١-٢-١١ المصفوفة المتماثلة بالسالب Skew-Symmetric

هي تلك المصفوفة (المربعة) التي تحقق $\left(A=-A^{T}\right)$. وعلى هذا فإن شرط التماثل بالسالب هو :

$$\boxed{a_{ij}=-a_{ji} \quad , \quad \forall\, i,j}$$

قاعدة :

عناصر القطر في المصفوفة المتماثلة بالسالب يجب أن تكون أصفاراً .

وإثبات ذلك سهل حيث أن :

$$a_{ii}=-a_{ii} \;\Rightarrow\; 2a_{ii}=0 \;\Rightarrow\; a_{ii}=0 \quad , \quad \forall\, i$$

وعلى سبيل المثال فإن المصفوفة :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

مصفوفة متماثلة بالسالب ، بينما المصفوفة :

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ليست متماثلة بالسالب (لماذا ؟) .

١-٢-١٢ المصفوفة الهيرميتية Hermitian Matrix

هي مصفوفة مربعة مُدخلاتها (عناصرها) في **C** (مجموعة الأعداد المركبة) وتُحقق أن :

$$\boxed{A=A^{*T}}$$

حيث (*) تُمثل عملية الترافق *Conjugation* .. أي أن :

$$\boxed{a_{ij}=a_{ji}^{*} \quad , \quad \forall\, i,j}$$

وهذا يعني أن :

قاعدة :

عناصر القطر في المصفوفة الهيرميتية يجب أن تكون أعداداً في R (مجموعة الأعداد الحقيقية) .

وإثبات ذلك سهل حيث أن :

$$a_{ii} = a_{ii}^{*} \quad \Rightarrow \quad a_{ii} \in R \quad , \quad \forall i$$

فمثلاً المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1+i & \sqrt{2}-i \\ -1-i & 6 & 1+3i \\ \sqrt{2}+i & 1-3i & 7 \end{bmatrix}$$

هي مصفوفة هيرميتية . لاحظ أن عناصر القطر يجب أن تكون حقيقية .

١-٢-١٣ المصفوفة الهيرميتية بالسالب *Skew-Hermitian Matrix*

يُطلق على المصفوفة المربعة أنها هيرميتية بالسالب إذا ما حققت الآتي :

$$\boxed{A = -A^{*T}}$$

وبالتالي فإن

$$\boxed{a_{ij} = -a_{ji}^{*}}$$

أي أنه :

قاعدة :

في المصفوفة الهيرميتية بالسالب فإن a_{ii} يجب أن تكون كمية تخيلية بحتة *Pure Imaginary* .

فمثلاً المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} -i & 1+i & 3 \\ -1+i & i & 5-3i \\ -3 & -5-3i & 3i \end{bmatrix}$$

مصفوفة هيرميتية بالسالب . لاحظ أن قطرها الرئيسي يحتوى على كميات تخيلية بحتة .

١-٢-١٤ أثر المصفوفة *Trace of a Matrix*

أثر المصفوفة المربعة ذات البعد $n \times n$ هو كمية مقياسية (يُرمز لهـا بـالرمز $tr\ A$) تُعطـى بالعلاقة :

$$tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

أي مجموع عناصر القطر الرئيسي . فمثلاً :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 0 & -5 & 3 \\ 4 & 12 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow tr\ A = (5) + (-5) + (3) = 3$$

١-٢-١٥ عملية إبدال المصفوفات *Commutation*

إذا ما كانت A , B بحيث $AB = BA$ فإن A , B تكونا إبداليتين *Commute* ..وإذا ما كـانت $AB =- BA$ فإنهما تكونا إبداليتين بالسالب *Anti-Commite* .

فمثلاً : المصفوفتان

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

إبداليتان . كذلك المصفوفتان

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} c & d \\ d & c \end{bmatrix}$$

إبداليتان أيضاً لجميع قيم a, b, c, d .

١-٢-١٦ المصفوفة الدورية *Idempotent Matrix*

تُسمى المصفوفة A أنها دورية إذا ما كان $A^2 = A$ حيث $A^2 = A.A$ ، وهذا يؤدي إلى أن $A^k = A$ حيث k عدد صحيح موجب .

فمثلاً : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}$ دورية لأن

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 0\end{bmatrix}=A$$

وهذا بدوره يؤدي إلى أن :

$$A^3=A^2.A=A.A=A^2=A$$
$$A^4=A^3.A=A.A=A^2=A$$

وهكذا ..كذلك المصفوفة :

$$B=\begin{bmatrix}2 & -2 & -4\\-1 & 3 & 4\\1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

دورية لأن $B^2=B.B=B$ (تحقق بنفسك) .

١-٢-١٧ المصفوفة المترقية للصفر *Nilpotent Matrix*

تُسمى المصفوفة المربعة A مصفوفة مترقية للصفر برتبة k (عدد صحيح موجب) إذا كان

$$A^k=O$$

حيث O هي المصفوفة الصفرية ..فعلى سبيل المثال المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}$$

مصفوفة مترقية للصفر من رتبة 3 حيث أن

$$A^2=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 3 & 9\\-1 & -1 & -3\end{bmatrix}$$
$$A^3=A^2.A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 3 & 9\\-1 & -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\5 & 2 & 6\\-2 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

١-٢-١٨ المصفوفة المترقية للوحدة *Involutary Matrix*

تُسمى المصفوفة المربعة A مصفوفة مترقية للوحدة إذا كان

$$A^2 = I$$

حيث I هي مصفوفة الوحدة ..فعلى سبيل المثال المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix} \text{ أو } A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix} \text{ أو } A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

مصفوفة مترقية للوحدة لأنها تحقق أن $A^2 = I$.

ومن خواص هذه المصفوفات أن

$$\boxed{A^{2n} = I} \text{ وأن } \boxed{A^{2n+1} = A}$$

حيث n عدد صحيح موجب وذلك لأن

$$A^4 = A^2.A^2 = I.I = I \quad , \quad A^6 = A^4.A^2 = I.I = I \quad , \quad \ldots\ldots$$
$$A^3 = A^2.A = I.A = A \quad , \quad A^5 = A^2.A^3 = I.A = A \quad , \quad \ldots\ldots$$

١-٢-١٩ المصفوفة القطرية –المصفوفةالمثلثية

Diagonal Matrix - Triangular Matrix

المصفوفةالمربعة التي جميع عناصرها أصفاراً **ماعدا عناصر القطر** $(a_{ij} = 0 \ \forall i \neq j)$ تُسمى **مصفوفة قطرية** ***Diagonal Matrix*** .. أما إذا كانت جميع عناصرها **تحت القطر** أصفاراً $(a_{ij} = 0 \ \forall i > j)$ فإنها تُسمى **مصفوفة مثلثية عليا** ***Upper Triangular Matrix*** .. وإذا كانت جميع عناصرها **فوق القطر** أصفاراً $(a_{ij} = 0 \ \forall i < j)$ فإنها تُسمى **مصفوفة مثلثية سُفلى** ***Lower Triangular Matrix*** .. فعلى سبيل المثال : المصفوفة $A=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية والمصفوفة $B=\begin{bmatrix}5&8&1\\0&1&9\\0&0&2\end{bmatrix}$ مصفوفة مثلثية عليا ، أما المصفوفة $C=\begin{bmatrix}5&0&0\\8&1&0\\1&9&2\end{bmatrix}$ فهي مصفوفة مثلثية سُفلى .

والمصفوفات السابقة (القطرية والمثلثية) لها بعض الخواص المفيدة ، منها :

(١) إذا كانت A , B مصفوفتين قطريتين لهما نفس الأبعاد فإن AB ، BA ، $A - B$ ، $A + B$ تكون مصفوفات قطرية . كذلك فإن A^{-1} تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خاليةمن الأصفار تماماً وتكون A^{-1} قطرية أيضاً وعناصر قطرها هي مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة A . **فمثلاً** :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

(٢) إذا كانت A , B مصفوفتين مثلثتين عُليا (سُفلى) لهما نفس الأبعاد فإن AB ، BA ، $A - B$ ، $A + B$ تكون مصفوفات مثلثية عُليا (سُفلى) . كذلك فإن A^{-1} تكون موجودة إذا كانت عناصر القطر خاليةمن الأصفار تماماً وتكون A^{-1} مثلثية عُليا (سُفلى) أيضاً وعناصر قطرها هي مقلوبات العناصر المتناظرة للمصفوفة A . **فمثلاً** :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & \frac{1}{6} & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

(٣) إذا كانت A مصفوفة قطرية أو مثلثية (عُليا أوسُفلى) فإن محدد المصفوفة $|A|$ (سيأتي تعريفه في نهاية هذا الباب) هو حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي ..أي أن :

$$\boxed{|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

وعلى هذا فاكتشاف أن A شاذة أو غير شاذة يأتي من عناصر القطر (في هذه الحالة فقط) . **فمثلاً** :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow |A| = (5)(6)(7) = 210 \neq 0$$

وبالتالي فإن A تكون غير شاذة .

١-٢-٢٠ الضرب البيني *Inner Product*

يُعرف الضرب البيني بين متجهين v, u من نفس الأبعاد (ويُرمز له بالرمز $\langle u,v \rangle$) على النحو التالي :

$$\boxed{\langle u,v \rangle = u^{*T} v}$$

وتكون نتيجة الضرب كمية مقياسية . فإذا كان $u = v$ فإن ناتج الضرب يكون مربع طول المتجه (مربع مقياس المتجه) .. أي أن :

$$\boxed{\langle u,u \rangle = u^{*T} u = \|u\|^2}$$

حيث $\|u\|$ يُسمى **بمقياس** المتجه *Norm of the Vector* (وفي حالات يُسمى **بطول** المتجه) وسيأتي تعريف وتحليل خواصه في فصل مستقل لاحق .

ويُحقق الضرب البيني الخصائص التالية :

لأي متجهات u,v,u_1,u_2,v_1,v_2 ولأي كمية مقياسية α :

(i) $\langle \alpha u,v \rangle = \alpha^* \langle u,v \rangle$.

(ii) $\langle u,\alpha v \rangle = \alpha \langle u,v \rangle$.

(iii) $\langle u,v_1 + v_2 \rangle = \langle u,v_1 \rangle + \langle u,v_2 \rangle$.

(iv) $\langle u_1 + u_2,v \rangle = \langle u_1,v \rangle + \langle u_2,v \rangle$.

(v) $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$ إذا كان $u,v \in R$.

فمثلاً : إذا كان $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \\ i \end{bmatrix}$ فإن :

$$\langle u,v \rangle = u^{*T} v = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = (1-i)(2) + (2)(0) + (-i)(3) = 2 - 5i$$

$$\|u\|^2 = u^{*T} u = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+i \\ 2 \\ i \end{bmatrix} = (1-i)(1+i) + (2)(2) + (-i)(i) = 7$$

إذن طول المتجه u هو $\sqrt{7}$.

١-٢-٢١ المتجهات المتعامدة *Orthogonal Vectors*

يُقال لمتجهين u, v (غير صفريين) أنهما متعامدان إذا كان حاصل الضرب البيني لهما يساوي صفراً .. أي أن

$\langle u,v\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ متعامدان u, v

فمثلاً المتجهات الأولية في أي فراغ متعامدة مثنى مثنى *Mutual Orthogonal* .

مثال : أوجد الشرط على α لكي يتعامد المتجهان $u = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

الحل :

$$\langle u,v\rangle = u^{*T}v = \begin{bmatrix} \alpha^* & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 2\alpha^* + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha^* + 9 = 0$$

فإذا كانت $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ فإن $\alpha^* = \alpha_1 - i\alpha_2$ وبالتالي (لكي يتعامد المتجهان) يكون :

$$2\alpha^* + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(\alpha_1 - i\alpha_2) + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2\alpha_1 + 9) + i(-\alpha_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} \alpha_1 = -\frac{9}{2} \\ \\ \alpha_2 = 0 \end{array} \right.$$

١-٢-٢٢ المتجهات المستقلة *Independent Vectors*

يُقال على المتجهات $\{x_i\}$ من n من المتجهات أنها غير مرتبطة خطياً *Linearly Independent* إذا وفقط إذا كان المجموع :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots\cdots + \alpha_n x_n$$

مساوياً للصفر إذا ما كان فقط مُتحققاً عند انعدام قيم الكميات المقياسية α_i (أي $\alpha_i = 0$ لجميع قيم i) .

مثال : أثبت أن المتجهات الأولية لأي فراغ هي متجهات غير مرتبطة خطياً .

الإثبات :

* فإذا ما أخذنا الفراغ الثنائي الأبعاد ، فإن

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}$$

وهذا يعني أنها غير مرتبطة خطياً .

* وبالمثل إذا ما أخذنا الفراغ الثلاثي الأبعاد ، فإن

$$\alpha_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\\\alpha_3=0\end{cases}$$

وهذا يعني أنها غير مرتبطة خطياً .

وهكذا إذا ما أخذنا أي فراغ .. أي أن المتجهات الأولية لأي فراغ هي متجهات غير مرتبطة خطياً .

نظرية :

المتجهات المتعامدة على بعضها البعض تكون غير مرتبطة خطياً .

ولإثبات ذلك دع $\{x_i\}$ مجموعة من المتجهات المتعامدة بعضها على بعض .. أي أن :

$$\langle x_i, x_j\rangle = 0 \quad \forall i \neq j \qquad , \qquad \langle x_i, x_i\rangle = \|x_i\|^2 \neq 0 \quad \forall i$$

وبالمثل فإن المجموع الصفري

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots\cdots + \alpha_n x_n = O$$

يتحول (إذا ما ضربناه في x_i^{*T}) إلى الآتي :

$$0 + 0 + \cdots\cdots + \alpha_i\|x_i\|^2 + \cdots\cdots + 0 = 0$$

وبالتالي يكون الحل الوحيد هو $\alpha_i = 0$ لجميع قيم i .. وبالتالي تكون المتجهات $\{x_i\}$ غير مرتبطة خطياً .

ملحوظة هامة :

عكس منطوق النظرية السابقة غير صحيح .. بمعنى أنه إذا كانت المتجهات $\{x_i\}$ متعامدة فهذا يعني أنها غير مرتبطة خطياً ، أما إذا كانت المتجهات $\{x_i\}$ غير مرتبطة خطياً فهذا لا يعني بالضرورة أنها متعامدة . فمثلاً المتجهات $\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ غير مرتبطين خطياً ولكنهما ليسا متعامدين .

١-٢-٢٣ متجهات الوحدة المتعامدة (المتجهات المتوحّدة)

Orthonormal Vectors

هذه المتجهات تحقق شرط التعامد السابق ويُضاف إليها أن مقياس كل متجه منها هو الوحدة .. أي أن

$$\boxed{\|x_i\| = 1 \quad \forall\, i}$$

ومن أشهر هذه المتجهات .. المتجهات الأولية في أي فراغ .

ويمكننا جعل أي متجه ذي طول يساوي الوحدة وذلك بقسمة عناصره على طوله ، **فمثلاً** إذا كان

$$x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \Rightarrow \|x\| = \sqrt{5} \Rightarrow x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

إذ أن $\|x_n\| = 1$ ، وعلى هذا الأساس فإنه يمكننا تحويل أي مجموعة من المتجهات المتعامدة إلى مجموعة من متجهات وحدة متعامدة .

١-٢-٢٤ التعميد بطريقة جرام - شميدت

Gram-Schmidt Orthonormalization Process

تُحول هذه العملية (والمُسماة بإسم جرام - شميدت) المتجهات $\{x_i\}$ المستقلة خطياً (الغير مرتبطة خطياً) إلى متجهات $\{y_i\}$ متعامدة . وتسير الطريقة على هذه الخطوات :

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 + \beta_1 y_1$$

ولابد أن تحقق β_1 العلاقة

$$\langle y_2, y_1 \rangle = 0$$

وبالتالي فإن :

$$\langle x_2, y_1 \rangle + \beta_1 \langle y_1, y_1 \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = -\frac{\langle \alpha_2, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2}$$

* دع

$$y_3 = x_3 + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2$$

ولابد أن تحقق γ_1, γ_2 العلاقتين

$$\langle y_3, y_1 \rangle = 0 \quad , \quad \langle y_3, y_2 \rangle = 0$$

وبالتالي فإن :

$$0 = \langle y_3, y_1 \rangle = \langle x_3, y_1 \rangle + \gamma_1 \langle y_1, y_1 \rangle + \gamma_2 \langle y_2, y_1 \rangle = \langle x_3, y_1 \rangle + \gamma_1 \|y_1\|^2$$
$$\Rightarrow \quad \gamma_1 = -\frac{\langle x_3, y_1 \rangle}{\|y_1\|^2}$$
$$0 = \langle y_3, y_2 \rangle = \langle x_3, y_2 \rangle + \gamma_1 \langle y_1, y_2 \rangle + \gamma_2 \langle y_2, y_2 \rangle = \langle x_3, y_2 \rangle + \gamma_2 \|y_2\|^2$$
$$\Rightarrow \quad \gamma_2 = -\frac{\langle x_3, y_2 \rangle}{\|y_2\|^2}$$

وهكذا تستمر العملية حتى نحصل على المجموعة $\{y_i\}$ من المتجهات المتعامدة .

مثال : إذا كانت :

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

متجهات مستقلة خطياً ، اجعل منها متجهات متعامدة .

الحل :

- $y_1 = x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

- $y_2 = x_2 + \beta_1 y_1 \;\Rightarrow\; \beta_1 = -\dfrac{\langle x_2, y_1\rangle}{\|y_1\|^2} = -\frac{3}{2} \;\Rightarrow\; y_2 = \begin{bmatrix}2\\0\\3\end{bmatrix} + \left(-\frac{3}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$

- $y_3 = x_3 + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2 \;\Rightarrow\; \begin{cases}\gamma_1 = -\dfrac{\langle x_3, y_1\rangle}{\|y_1\|^2} = -\frac{1}{2}\\[2ex] \gamma_2 = -\dfrac{\langle x_3, y_2\rangle}{\|y_2\|^2} = -\dfrac{1}{17}\end{cases}$

$$\Rightarrow\; y_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{17}\right)\begin{bmatrix}2\\-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{17}\begin{bmatrix}15\\10\\-10\end{bmatrix}$$

ويمكن للقارئ إجراء الاختبار الآتي للتأكد من صحة ما حصلنا عليه :

$$\langle y_1, y_2\rangle = [0 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix}2\\-\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix} = 0 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\langle y_1, y_3\rangle = \frac{1}{17}[0 \quad 1 \quad 1]\begin{bmatrix}15\\10\\-10\end{bmatrix} = \frac{1}{17}(0 + 10 - 10) = 0$$

$$\langle y_2, y_3\rangle = \frac{1}{17}\left[2 \quad -\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\right]\begin{bmatrix}15\\10\\-10\end{bmatrix} = \frac{1}{17}(30 - 15 - 15) = 0$$

أي أن المتجهات y_1, y_2, y_3 متجهات متعامدة على بعضها البعض .

١-٢-٢٥ عملية الوحدة *Orthonormalization*

إذا ما كانت المجموعة $\{x_i\}$ هي مجموعة من المتجهات المتعامدة ، فإنه أحياناً يكون من المفيد تحويلها إلى مجموعة من متجهات الوحدة المتعامدة .. وتُسمى هذه العملية بعملية الوحدة *Orthonormalization* .. أي عملية التحويل إلى متجهات وحدة متعامدة . وتتم هذه العملية عن طريق قسمة كل متجه x_i على طوله $\|x_i\|$. وبالتالي يكون $y_i = \dfrac{x_i}{\|x_i\|}$ بحيث يكون $\|y_i\| = 1$

وتكون المجموعة $\{y_i\}$ مجموعة من المتجهات المتوحدة .

١-٢-٢٦ المصفوفة المتعامدة Orthogonal Matrix

إذا ما كانت $\{x_i\}$ مجموعة من المتجهات المتعامدة (على بعضها البعض) *Mutual Orthogonal* فإن المصفوفة التي تضم هذه المتجهات كأعمدة أو كصفوف (ولتكن المصفوفة A) تُسمى مصفوفة متعامدة .

> **نظرية :**
>
> **الضرب $A^{*T}A$ ينتج مصفوفة قطرية إذا وفقط إذا كانت أعمدة A هي مجموعة من المتجهات المتعامدة .**

ولإثبات ذلك دع

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix}$$

إذن

$$A^{*T} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow & x_1^{*T} \\ \rightarrow & x_2^{*T} \\ & \cdots\cdots \\ \rightarrow & x_n^{*T} \end{matrix}$$

وبالتالي فإن

$$A^{*T}A = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}}_{=A^{*T}} \begin{matrix} \rightarrow & x_1^{*T} \\ \rightarrow & x_2^{*T} \\ & \cdots\cdots \\ \rightarrow & x_n^{*T} \end{matrix} \right) \left(\overbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}}^{=A} \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \|x_1\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \|x_2\|^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \|x_n\|^2 \end{bmatrix} = diag\left(\|x_1\|^2, \|x_2\|^2, \cdots\cdots, \|x_n\|^2\right)$$

وبالتالي $A^{*T}A$ أو AA^{*T} ستكون مصفوفة قطرية عناصرها هي مربعات مقاييس المتجهات الأعمدة (أو الصفوف) في المصفوفة A .

ومن الممكن ان تكون المصفوفة متوحمدة *Orthonormal Matrix* إذا ما كانت أعمدتهـــا (أو صفوفها) متجهات متوحمدة *Orthonormal Vectors* ، وفي هذه الحالة فإن $A^{*T}A = AA^{*T} = I$.

١-٢-٢٧ المصفوفات الوحدوية Unitary Matrices

إذا ما كانت A مصفوفة مربعة تحقق $AA^{*T} = I$ فإن $A^{-1} = A^{*T}$ ، وعندئذٍ تُسمى المصفوفة A مصفوفة وحدوية *Unitary Matrix* . **فمثلاً** دع

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & \frac{15}{17} \\ 1 & -\frac{3}{2} & \frac{10}{17} \\ 1 & \frac{3}{2} & -\frac{10}{17} \end{bmatrix}$$
$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix}$$

فإن x_1, x_2, x_3 متجهات متعامدة (أنظر المثال في بند ١-٢-٢٤) وبالتالي يكون

$$AA^{*T} = diag\left(2 \quad \tfrac{17}{2} \quad \tfrac{425}{289}\right)$$

فإذا ما كانت

$$B = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{\|x_1\|} & \frac{x_2}{\|x_2\|} & \frac{x_3}{\|x_3\|} \end{bmatrix}$$

حيث y_1, y_2, y_3 متجهات متوحمدة ، أي أن :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{\sqrt{34}} & \frac{15}{\sqrt{425}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-3}{\sqrt{34}} & \frac{10}{\sqrt{425}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{34}} & \frac{-10}{\sqrt{425}} \end{bmatrix}$$

(تحقق أن $BB^{*T} = I$) وبالتالي فإن :

$$B^{-1} = B^{*T} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{34}} & \frac{-3}{\sqrt{34}} & \frac{3}{\sqrt{34}} \\ \frac{15}{\sqrt{425}} & \frac{10}{\sqrt{425}} & \frac{-10}{\sqrt{425}} \end{bmatrix}$$

١-٢-٢٨ تفاضل وتكامل المصفوفات

Matrix Differentiation and Integration

تعريف ١ :

المصفوفة المربعة $A_{n\times n}(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ تكون متصلة عند النقطة $t=t_0$ إذا كانت كل عناصرها $a_{ij}(t)$ متصلة عند $t=t_0$.

تعريف ٢ :

المصفوفة المربعة $A_{n\times n}(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ تكون قابلة للتفاضل عند النقطة $t=t_0$ إذا كانت كل عناصرها $a_{ij}(t)$ قابلة للتفاضل عند $t=t_0$ ويكون

$$\boxed{\frac{dA(t)}{dt}=\left[\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right]}$$

فمثلاً إذا كان

$$A=A(t)=\begin{bmatrix} t & 1-t & t^2 \\ t^3 & \sin t & e^t \\ \ln t & 1/t & e^{-t} \end{bmatrix}$$

فإن

$$\frac{dA}{dt}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2t \\ 3t^2 & \cos t & e^t \\ 1/t & -1/t^2 & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

خواص تفاضل المصفوفات :

(١) $\frac{d}{dt}(A\pm B)=\frac{dA}{dt}\pm\frac{dB}{dt}$

(٢) $\frac{d}{dt}(\alpha A)=\alpha\left(\frac{dA}{dt}\right)$ حيث α كمية مقياسية ثابتة .

(٣) $\frac{d}{dt}(\beta A)=\left(\frac{d\beta}{dt}\right)A+\beta\left(\frac{dA}{dt}\right)$ حيث β كمية مقياسية متغيرة .

(٤) $\frac{d}{dt}(AB)=\left(\frac{dA}{dt}\right)B+A\left(\frac{dB}{dt}\right)$

لاحظ أن إثبات الخواص السابقة ينبع من تعريف ٢ ذاته .

تعريف ٣ :

إذا كانت كل عناصر المصفوفة $A_{n\times n}(t)=\left[a_{ij}(t)\right]$ قابلة للتكـــامل *Integrable* فإن المصفوفة *A(t)* تكون قابلة للتكامل علـــى النحـــو التالي :

$$\int A(t)dt=\left[\int a_{ij}(t)dt\right]$$

تعريف ٤ :

إذا كان $x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ **فإن**

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \quad , \quad \int x dt=\begin{bmatrix} \int x_1 dt \\ \int x_2 dt \\ \vdots \\ \vdots \\ \int x_n dt \end{bmatrix}$$

خواص أخرى هامة :

(٥) $\frac{\partial}{\partial x}\left(c^T x\right)=c$ حيث c , x متجهان .

(٦) $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^T Bx\right)=2Bx$ حيث x متجه ، B مصفوفة متماثلة .

فمثلاً :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}x\right)=\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(x^T\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}x\right)=2\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 3\\2 & 3 & 1\end{bmatrix}x$$

١-٢-٢٩ مقياس المصفوفة والمتجه *Matrix and Vector Norms*

١-٢-٢٩-١ مقياس المتجه *Vector Norm*

يُعبر المقياس عن المدى الذي وصلت إليه قيمة عناصر المتجه لا عن عدد هذه العناصر داخل المتجه . ويُعتبر طول المتجه **Length of the Vector** من أقدم المقاييس حيث أن طول المتجه $x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ هو $\left(\|x\|=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2}\right)$ حيث $x\in R^n$. وبالطبع يمكننا التعبير عن المدى الذي وصلت إليه قيمة عناصر المتجه بمقاييس أخرى . فيمكننا مثلاً جعل $\left(\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)$ أو جعل $\left(\|x\|=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots\cdots,|x_n|\}\right)$

دعنا الآن نقدم التعريف التالي :

تعريف :

مقياس المتجه x (حيث $x\in R^n$ أو $x\in C^n$) هو كمية غير سالبة يُعبر عنها بـ $\|x\|$ ويُقال عنها مقياس *Norm of x* ويُحقق الآتي :

(i) $\|x\|>0$ لكل $x\neq 0$ ، $\|x\|=0$ فقط عندما $x=0$.

(ii) $\|kx\|=|k|.\|x\|$ لكل كمية مقياسية k .

(iii) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$ وتُسمى متباينة المثلث ***Triangle Inequality*** .

وهذا يُعطي صور المقاييس الشائعة :

(مقياس – ١)	$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|=|x_1|+|x_2|+\cdots\cdots+|x_n|$
(مقياس – ٢)	$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2}$
(مقياس – ∞)	$\|x\|_3=\max_i\{|x_i|\}$

الإثبات :

* **بالنسبة للمقياس – ١ :**

(i) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| > 0$

$\|x\|_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad |x_i| = 0 \; \forall i \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \; \forall i \quad \Rightarrow \quad x = 0$

(ii) $\|kx\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |kx_i| = \sum_{i=1}^{n} |k||x_i| = |k| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |k| \|x\|_1$

(iii) $\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

* **بالنسبة للمقياس – ٢ :**

(i) $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} > 0$

$\|x\|_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_i^2 = 0 \; \forall i \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \; \forall i \quad \Rightarrow \quad x = 0$

(ii) $\|kx\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |kx_i|^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |k|^2 |x_i|^2} = |k| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = |k| \|x\|_2$

(iii) $\|x + y\|_2^2 = (x^{*T} + y^{*T})(x + y) = x^{*T}x + x^{*T}y + y^{*T}x + y^{*T}y = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + (x^{*T}y + y^{*T}x)$

وباستخدام متباينة شفارز *Schwarz Inequality* (وسيأتي إثباتهـــا في المثال التالي) وصيغتها الرياضية هي :

متباينة شفارز *Schwarz Inequality* :

$$|x^{*T}y| \le \|x\|_2 . \|y\|_2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i| . |y_i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2}$$

حيث $\|x\|_2 = \sqrt{x^{*T}x}$

نجد أن :

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + (x^{*T}y + y^{*T}x) \le \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2^2 . \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$$

وبالتالي $\|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$

* **بالنسبة للمقياس – ∞ :**

(i) $\|x\|_\infty = \max_i \{|x_i|\} > 0$

$\|x\|_\infty = 0 \quad \Rightarrow \quad |x_i| = 0 \;\forall i \quad \Rightarrow \quad x_i = 0 \;\forall i \quad \Rightarrow \quad x = 0$

(ii) $\|kx\|_\infty = \max_i \{|kx_i|\} = |k| \max_i \{|x_i|\} = |k| \|x\|_\infty$

(iii) $\|x+y\|_\infty = \max_i \{|x_i + y_i|\} \le \max_i \{|x_i|\} + \max_i \{|y_i|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

مثال : إثبت متباينة شفارز .

الإثبات :

لأي كمية مقياسية α وأي متجهين x, y :

$$0 \le \|x+\alpha y\|_2^2 = (x+\alpha y)^{*T}(x+\alpha y) = x^{*T}x + \alpha x^{*T}y + \alpha^* y^{*T}x + \alpha^*\alpha y^{*T}y$$
$$= \|x\|_2^2 + \alpha x^{*T}y + \alpha^* y^{*T}x + |\alpha|^2 \|y\|_2^2$$

وعندما يكون $x^{*T}y = 0$ (ومن ثم $y^{*T}x = 0$) فإن المتباينة تكون متحققة لأنه في هذه الحالة (وبوضع $\alpha = 1$) يكون :

$$0 \le \|x+\alpha y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + |\alpha|^2 \|y\|_2^2 \xrightarrow{\alpha=1} \|x+y\|_2 = \sqrt{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2} \le \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2$$

والآن بوضع

$$\alpha = -\frac{\|x\|_2^2}{x^{*T}y}$$

فالمتباينة تصبح

$$0 \le \|x+\alpha y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \left(-\frac{\|x\|_2^2}{x^{*T}y}\right)x^{*T}y + \left(-\frac{\|x\|_2^2}{y^{*T}x}\right)y^{*T}x + \left(\frac{\|x\|_2^4}{(x^{*T}y)(y^{*T}x)}\right)\|y\|_2^2$$
$$= -\|x\|_2^2 + \frac{\|x\|_2^4 \|y\|_2^2}{|x^{*T}y|^2}$$

والأخيرة تحقق الآتي :

$$-1+\frac{\|x\|_2^2\|y\|_2^2}{|x^{*T}y|^2}\geq 0 \quad\Rightarrow\quad \|x\|_2^2\|y\|_2^2\geq |x^{*T}y|^2 \quad\Rightarrow\quad |x^{*T}y|\leq \|x\|_2.\|y\|_2$$

أي أن متباينة شفارز صحيحة .

مثال : إثبت أن $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$.

الإثبات :

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\geq \max_i\{|x_i|\}=\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|\leq n\max_i\{|x_i|\}=n\|x\|_\infty$$

مثال : إثبت أن $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$.

الإثبات :

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\geq\sqrt{\max_i|x_i|^2}=\max_i|x_i|=\|x\|_\infty$$

$$\|x\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\leq\sqrt{n\max_i|x_i|^2}=\sqrt{n}\max_i|x_i|=\sqrt{n}\|x\|_\infty$$

مثال : أوجد المقاييس $\|x\|_\infty$ ، $\|x\|_2$ ، $\|x\|_1$ والعلاقة بينها للمتجه $x=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$.

الحل :

$$n=3 \quad,\quad \|x\|_1=6 \quad,\quad \|x\|_2=\sqrt{14}\cong 3.742 \quad,\quad \|x\|_\infty=3$$

لاحظ تحقق الآتي :

(i) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ $\quad (3<6<3\times 3)$

(ii) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ $\quad (3.742<6<\sqrt{3}\times 3)$

(iii) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$ $\quad (3<3.742<\sqrt{3}\times 3)$

(iv) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times 6 < 3.742 < 6\right)$

(v) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_2$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \times 3.742 < 3 < 3.742\right)$

(vi) $\frac{1}{n}\|x\|_1 \le \|x\|_\infty \le \|x\|_1$ $\left(\frac{1}{3} \times 6 < 3 < 6\right)$

والعلاقات السابقة تحقق بعضها البعض .

وعلى ضوء الأمثلة السابقة فإنه من الممكن أن نقرر أن المقاييس 1 ، 2 ، ∞ في الفراغات ذات الأبعاد المحدودة *Finite Dimensional Spaces* كلها متكافئة حيث يرتبط أي إثنين منها بالمتباينات الآتية :

$$\boxed{c_1\|x\|_i \le \|x\|_j \le c_2\|x\|_i}$$

حيث c_1, c_2 ثوابت موجبة .

مثال : افترض أن ‖ ‖ هو مقياس متجه في R^n وأن A مصفوفة $n \times n$ بحيث عدد الصفوف المستقلة هو n ، أثبت أن المقياس $\|x\|$ المُعرف بـ $\left(\|x\| = \|A_{n\times n}x_{n\times 1}\|\right)$ يكون مقياس لمتجه في R^n .

الإثبات :

دعنا نحقق الآتي :

(i) $\|x\| = 0 \Rightarrow \|Ax\| = 0$

وهذا لا يتحقق إلا إذا كان $x = O$ لأن عدد الصفوف المستقلة في A هو n .

(ii) $\|kx\| = \|Akx\| = \|kAx\| = |k|.\|Ax\| = |k|.\|x\|$

وذلك لأية كمية مقياسية k .

(iii) $\|x + y\| = \|A(x + y)\| = \|Ax + Ay\| \le \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\| + \|y\|$

وذلك لأي متجهين x, y .

وبالتالي فإن التعريف يُمثل مقياس لمتجه في R^n .

مثال : أثبت أنه لأي مقياس ‖ ‖ ولأي متجهين x , y فإن $\left|\|x\|-\|y\|\right| \le \|x-y\|$

الإثبات :

دع

$$x = x - y + y$$

ومنها يكون

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \le \|x-y\| + \|y\| \quad \Rightarrow \quad \|x\| - \|y\| \le \|x-y\| \qquad (1)$$

كذلك

$$y = y - x + x$$

ومنها يكون

$$\|y\| = \|(y-x)+x\| \le \|y-x\| + \|x\| \quad \Rightarrow \quad \|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\| \qquad (2)$$

وبالتالي فإن (1) ، (2) لا تتحققان معاً إلا إذا كانت :

$$\left|\|x\|-\|y\|\right| \le \|x-y\|$$

ملحوظة :

لاحظ أن :

$$\|x-y\| \le \|x\| + \|y\|$$

وبالتالي فإن :

$$\boxed{\left|\|x\|-\|y\|\right| \le \|x-y\| \le \|x\| + \|y\|}$$

١-٢-٢٩-٢ مقياس المصفوفة *Matrix Norm*

ناتج القسمة $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \; , \quad x \ne O$

يقيس مدى التكبير *Magnification* أو التقلص *Shrunk* الناتج من المصفوفة A . فإذا ما أخذنا **أصغر حد أعلى** ***Least Upper Bound*** لناتج القسمة هذا فإنه يكون مقياساً جيداً لـــ **مقاس** ***Size*** المصفوفة A

تعريف :

دع A مصفوفة $m \times n$ ، فإن

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq O}\left(\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1}\right)$$

$$\|A\|_2 = \max_{x \neq O}\left(\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}\right)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq O}\left(\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}\right)$$

نظرية

(i)
$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

أي أقصى قيمة عددية لمجموع الأعمدة

Maximum Absolute Column Sum

(ii)
$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

أي أقصى قيمة عددية لمجموع الصفوف

Maximum Absolute Row Sum

وأرجع القارئ المهتم بالإثباتات إلى كتاب (*Deif A.S.*, 1982,*p*.23) مع ملاحظة أننا لم نقدم تعريفاً مماثلاً لـ $\|A\|_2$ وذلك لاحتياجه إلى معلومات عن القيم الذاتية للمصفوفة (ستأتي لاحقاً – أنظر الباب الثالث) .. وعلى القارئ المهتم أيضاً أن يحاول إثبات العلاقات الآتية لأية مصفوفة $A = A_{m\times n}$:

(i) $\|A\|_1 \le m\|A\|_\infty$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_2 \le \|A\|_\infty \le \sqrt{n}\|A\|_2$

(iii) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_2 \le \|A\|_1 \le m\|A\|_2$

(iv) $\frac{1}{n}\|A\|_\infty \le \|A\|_1 \le m\|A\|_\infty$

ملاحظة عامة :

لاحظ أن العلاقات السابقة تؤدي إلى نتيجة هامة وهي أنه إذا ما آل أي مقياس من الثلاثة لمتتابعة $\{A_i\}$ من المصفوفات إلى الصفر فإن المقاييس الأخرى ستؤول أيضاً إلى الصفر وذلك لأن :

$$n \max_{i,j} |a_{ij}| \geq \|A\|_\infty \geq \max_{i,j} |a_{ij}| \qquad \text{(لماذا ؟)}$$

فإن مقياس أي متتابعة لمصفوفات يؤول إلى الصفر إذا وفقط إذا كان كل عنصر من عناصر A يؤول إلى الصفر وهذا يمدنا مقياس التقارب لمتتابعات المصفوفات .

مثال : إثبت أن $\|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|$.

الإثبات :

من تعريف المقياس :

$$\max_{x \neq O} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

وبالتالي فإنه لأي x $\left(x \in C^n \, , \, A \in C^{m \times n}\right)$ يكون :

$$\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad \Rightarrow \quad \|Ax\| \leq \|A\|.\|x\|$$

مثال : أثبت أن $\|\alpha A\| = |\alpha|.\|A\|$ حيث α كمية مقياسية عامة $(\alpha \in C)$.

الإثبات :

$$\|\alpha A\| = \max_{x \neq O} \frac{\|\alpha Ax\|}{\|x\|} = |\alpha| \max_{x \neq O} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = |\alpha|.\|A\|$$

مثال : أثبت أن $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

الإثبات :

$$\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\|.\|x\| + \|B\|.\|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\|$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \le \|A\| + \|B\| \qquad (1)$$

ولكن

$$\|A+B\| = \max_{x \ne O} \frac{\|(A+B)x\|}{\|x\|} \qquad (2)$$

ومن (1) ، (2) يجب على $\|A+B\|$ ألا يتخطى قيمة $\|A\| + \|B\|$ ، أي أن :

$$\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$$

مثال : أثبت أن $\|AB\| \le \|A\|.\|B\|$.

الإثبات :

$$\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \le \|A\|.\|Bx\| \le \|A\|.\|B\|.\|x\|$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \le \|A\|.\|B\|$$

إذن

$$\|AB\| = \max_{x \ne O} \frac{\|(AB)x\|}{\|x\|} \le \|A\|.\|B\|$$

مثال : أثبت أن $\|I\| = 1$.

الإثبات :

$$\|I\| = \max_{i} \frac{\|Ix\|}{\|x\|} = \max_{i} 1 = 1$$

مثال : أثبت أن $\|A^{-1}\| \ge \|A\|^{-1}$.

الإثبات :

$$1 = \|I\| = \|AA^{-1}\| \le \|A\|.\|A^{-1}\| \qquad \Rightarrow \qquad \|A^{-1}\| \ge \frac{1}{\|A\|} = \|A\|^{-1}$$

مثال : أثبت أن $\left|\,\|A\|-\|B\|\,\right|\le\|A-B\|$.

الإثبات :

دع

$$A=A-B+B$$

ومنها يكون

$$\|A\|=\|(A-B)+B\|\le\|A-B\|+\|B\| \quad\Rightarrow\quad \|A\|-\|B\|\le\|A-B\| \qquad (1)$$

كذلك

$$B=B-A+A$$

ومنها يكون

$$\|B\|=\|(B-A)+A\|\le\|B-A\|+\|A\| \quad\Rightarrow\quad \|B\|-\|A\|\le\|B-A\|=\|A-B\| \qquad (2)$$

وبالتالي فإن (1) ، (2) لا تتحققان معاً إلا إذا كانت :

$$\left|\,\|A\|-\|B\|\,\right|\le\|A-B\|$$

ملحوظة :

لاحظ أن :

$$\|A-B\|\le\|A\|+\|B\|$$

وبالتالي فإن :

$$\boxed{\left|\,\|A\|-\|B\|\,\right|\le\|A-B\|\le\|A\|+\|B\|}$$

ولأهمية العلاقات السابقة فإننا نلخصها كالآتي :

(i)	$\|Ax\|\le\|A\|.\|x\|$	(ii)	$\|\alpha A\|=\|\alpha\|.\|A\|$
(iii)	$\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$	(iv)	$\|AB\|\le\|A\|.\|B\|$
(v)	$\|I\|=1$	(vi)	$\|A^{-1}\|\ge\|A\|^{-1}$
(vii)	$\|A-B\|\ge\left\|\,\|A\|-\|B\|\,\right\|$	(viii)	$\|A-B\|\le\|A\|+\|B\|$

مثال : أثبت أن $\|A^k\| \le \|A\|^k$ حيث k عدد صحيح موجب .

الإثبات :

$$A^k = A.A.\cdots\cdots.A \quad (k \text{ من المرات})$$

إذن
$$\|A^k\| \le \|A\|.\|A\|.\cdots\cdots.\|A\| = \|A\|^k$$

ملاحظة :

المثال السابق يُلقي الضوء على حقائق هامة مثل :

* إذا كان $\|A\| < 1$ فهذا يؤكد أن $A^k \to O$ وذلك عندما $k \to \infty$.
* إذا كان $\|A\| \ge 1$ فإن هذا لا يؤكد أن $A^k \to \infty$ وذلك عندما $k \to \infty$.

ولنأخذ المثال التالي (Nen Noble & el , 1977 , p.167) .. دع :

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$\|A\|_1 = 0.6 \quad , \quad \|A\|_\infty = 0.7$$

ولأن $|a|_{ij} < 1$ فإن $\lim_{k\to\infty} A^k = 0$ (لماذا ؟) وعلى القارئ أن يتأكد من ذلك بنفسه وذلك بحساب $A^2, A^3, A^4, \cdots\cdots$. والآن دع

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.1 & 1.2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\|A\|_1 = 1.7 \quad , \quad \|A\|_\infty = 1.3$$

وربما نُخمن أن $A^k \to \infty$ (وهذا هو الواقع بالفعل ويُترك للقارئ التأكد من ذلك) . وإذا جعلنا

$$A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.5 \\ -0.18 & 1.2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\|A\|_1 = 1.7 \quad , \quad \|A\|_\infty = 1.38$$

فإن التخمين بأن $A^k \to \infty$ يفشل هذه المرة إذ نجد أن $A^k \to O$.

حقيقة باناخ *Banach Lemma*

إذا كانت P مصفوفة مربعة $n \times n$ وكان $\|P\| < 1$ فـــإن $(I + P)$ تكون غير شاذة ويكون

$$\frac{1}{1+\|P\|} \leq \left\|(I+P)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|P\|}$$

الإثبات :

$(I + P)$ تكون غير شاذة إذا وفقط إذا كان الحل الوحيد للمعادلة $(I + P)x = 0$ هو الحـــل $x = 0$. دعنا نفترض أن $(I + P)x = 0$ وأن $x = -Px$ ، إذن

$$\|x\| = \|Px\| \leq \|P\|.\|x\| \quad \Rightarrow \quad \|P\| \geq 1$$

ولكن $\|P\| < 1$ يؤدي إلى تعارض . والآن دع

$$B = (I+P)^{-1}$$

فإن :

$$I = B(I+P) = B + BP \quad \Rightarrow \quad 1 = \|B + BP\| \leq \|B\|.\|I + P\| \leq \|B\|.(1 + \|P\|)$$

وبالتالي فإن :

$$\|B\| \geq \frac{1}{1+\|P\|} \qquad (1)$$

كذلك فإن

$$B = I - BP \quad \Rightarrow \quad \|B\| = \|I - BP\| \leq 1 + \|BP\| \leq 1 + \|B\|.\|P\|$$

وبالتالي فإن

$$\|B\|.(1 - \|P\|) \leq 1$$

أي أن

$$\|B\| \leq \frac{1}{1-\|P\|} \qquad (2)$$

ومن (1) و (2) نستنتج أن

$$\frac{1}{1+\|P\|} \leq \left\|(I+P)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1-\|P\|}$$

فمثلاً دع

$$A = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 \\ 0.8 & 0.9 \end{bmatrix}$$

فإن

$$A = I + P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 & -0.6 \\ 0.8 & -0.1 \end{bmatrix}$$

ومنها نستنتج أن

$$\|P\|_\infty = 0.9 \qquad \Rightarrow \qquad \|P\| < 1$$

وباستخدام حقيقة باناخ فإن

$$0.563 = \frac{1}{1+0.9} \leq \|A^{-1}\|_\infty \leq 10 = \frac{1}{1-0.9}$$

لاحظ أيضاً أن :

$$\|A\|_\infty = 1.7$$

وأن

$$\|A^{-1}\|_\infty \geq \|A\|_\infty^{-1} = \frac{1}{1.7} = 0.5882$$

نظرية :

دع A ، R مصفوفات مستطيلة $m \times n$ وأن A غير شاذة ، فإذا كان :

$$\alpha = \|A^{-1}R\| < 1$$

أو

$$\|R\| < \|A\|$$

فإن $A + R$ تكون غير شاذة ويكون

$$\|(A+R)^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1-\alpha}$$

الإثبات :

فلنأخذ الحالة

$$\alpha = \|A^{-1}R\| < 1$$

فإن

$$A + R = A(I + P)$$

حيث

$$P = A^{-1}R$$

ولكن من حقيقة باناخ فإن $(I + P)$ غير شاذة (لآن $\|P\| < 1$) ويكون

$$\|(I+P)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\alpha}$$

ولكن

$$(A+R)^{-1} = (I+P)^{-1} A^{-1}$$

ومنها يكون

$$\|(A+R)^{-1}\| = \|(I+P)^{-1}\|.\|A^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\alpha}$$

وبذلك يثبت المطلوب .

مثال : إفترض أن P مصفوفة مربعة $n \times n$ بحيث $\left(\sum_{j=1}^{n} |P_{ij}| < 1, \forall i \right)$ ، اثبت أن $(I+P)$ غير شاذة

الإثبات :

الشرط على المصفوفة P يعني أن $\|P\|_\infty < 1$ وهذا يعني أن $(I+P)$ غير شاذة كما برهننا في حقيقة باناخ .

مثال : افترض أن A مصفوفة مربعة $n \times n$ وأنها تحقق الآتي : $\left(|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}| \;,\; \forall i \right)$ ، اثبت أن A غير شاذة

ملحوظة : يُطلق على المصفوفة A في هذه الحالة **مهيمنة القطر** ***Diagonally Dominant*** .

الإثبات :

دع

$$A = I + P$$

إذن

$$P = A - I$$

وبالتالي فإن

$$p_{ij} = a_{ij} \;, i \ne j \,, p_{ii} = a_{ii} - 1 \,\forall i$$

أيضاً

$$\|P\|_\infty = |a_{ii} - 1| + \sum_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{n} |a_{ij}|$$

فإذا جعلنا $\|P\|_\infty < 1$ فهذا سوف يؤدي إلى

$$|a_{ii}-1|+\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<1$$

أي أن

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<1-|a_{ii}-1|$$

ولكن

$$1=1-a_{ii}+a_{ii}\Rightarrow|1|=|(1-a_{ii})+a_{ii}|\leq|1-a_{ii}|+|a_{ii}|=|a_{ii}-1|+|a_{ii}|$$

أي أن

$$\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|<|a_{ii}-1|+|a_{ii}|-|a_{ii}-1|=|a_{ii}|\Rightarrow|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|a_{ij}|$$

أي أن A غير شاذة .

١-٢-٣٠ ضرب كرونكر *Kroncker Product*

يمكننا تقديم تعريف آخر للضرب كالآتي :

تعريف :

افرض أن $A_{m\times n}=[a_{ij}]$ **وأن** $B_{p\times q}=[b_{ij}]$ **فإن ضـــرب كرونكـــر** ***Kroncker Product*** **يُعرف كالآتي :**

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B\end{bmatrix}$$

وكل مصفوفة فرعية $a_{ij}B$ **لها الأبعاد** $p\times q$ **، وبالتالي فإن** $A\otimes B$ **لها الأبعاد** $(mp)\times(nq)$ **.**

فمثلاً دع

$$A_{22}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\quad,\quad B_{2\times 2}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 2 & -3\end{bmatrix}$$

فإن

$$(A\otimes B)_{4\times4}=\begin{bmatrix}1\begin{bmatrix}-1&4\\2&-3\end{bmatrix}&2\begin{bmatrix}-1&4\\2&-3\end{bmatrix}\\3\begin{bmatrix}-1&4\\2&-3\end{bmatrix}&4\begin{bmatrix}-1&4\\2&-3\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&4&-2&8\\2&-3&4&-6\\-3&12&-4&16\\6&-9&8&-12\end{bmatrix}$$

وكذلك

$$(B\otimes A)_{4\times4}=\begin{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}&4\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\\2\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}&-3\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&4&8\\-3&-4&12&16\\2&4&-3&-6\\6&8&-9&-12\end{bmatrix}$$

خواص ضرب كرونكر :

(i) $A\otimes B\neq B\otimes A$ ولكن عناصر $B\otimes A$ ما هي إلا إعادة ترتيب لعناصر $A\otimes B$ (لاحظ ذلك بنفسك) ، وبالتالي فإن عدم قابلية الإبدال *non-commutativity* المقترن بـالضرب المعروف سابقاً يمكن علاجه في ضرب كرونكر بتحويلات بسيطة في الصفوف والأعمدة .

(ii) $(A\otimes B)^T\neq A^T\otimes B^T$ دون عكس في الترتيب .

(iii) $(A\otimes B)^{*T}\neq A^{*T}\otimes B^{*T}$

(iv) $A\otimes(B+C)=A\otimes B+A\otimes C$

(v) $A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$

(vi) $(A_{n\times m}\otimes B_{p\times q})\bullet(C_{n\times r}\otimes D_{q\times s})=(A\bullet C)\otimes(B\bullet D)$ حيث $(\bullet)$ تعبر عن الضرب العادي للمصفوفات .

فمثلاً إذا كان $D=A\otimes I_m+I_n\otimes B^T$

فإن $D^2=A^2\otimes I_m+2A\otimes B^T+I_n\otimes(B^T)^2$

(vii) تُعرف قوى كرونكر *Kroncker powers* كالآتي :

$$A^{[2]}=A\otimes A$$
$$A^{[3]}=A\otimes A\otimes A=A\otimes A^{[2]}=A^{[2]}\otimes A$$

وهكذا ، ومن ثم فإن $(A_{m\times n}\bullet C_{n\times r})^{[k]}=A^{[k]}\bullet C^{[k]}$

وعلى القارئ أن يحاول إثبات هذه الخواص السابقة (يمكن الرجوع لـ *Barnett S.*, 1979) .

١-٢-٣١ المحددات *Determinants* :

مقدمة :

كل مصفوفة مُصَاحب لها كمية مقياسية تُسمى بالمحدد *determinant* ، والتعريف المبدئي للمحدد يتميز عن طريق التباديل **permutations** (أنظر على سبيل المثال *Deif A.S.,.* 1982) ، ولكن هذا التعريف ليس عملياً في الحسابات خاصةً للمهندسين والعلميين التطبيقيين لتعقيده .. ولذلك فقد تم تعريف فك المحدد بطرق أخرى أكثر تيسيراً سوف نلتزم بها في هذا الفصل .. وعلى كلٍ يجب القول أن المحدد لا يُعرف فقط إلا على المصفوفات المربعة .

تعريف :

يُعرف محدد المصفوفة $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ **من الرتبة** 2×2 **على أنه الكمية المقياسية** $ad-bc$ **(أي نبتدأ بضرب عناصر القطر ثم نطرح منه حاصل ضرب عناصر شبه القطر) .**

فمثلاً إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A=|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}=(3)(7)-(2)(6)=21-12=9$$

فك المحدد عن طريق العوامل *cofactors* :

تعريف : المُصَغَّر *minor* :

المُصَغَّر هو محدد أي مصفوفة مربعة فرعية من المصفوفة *A* .

فمثلاً إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=8 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-8$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-2 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 13 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 \quad , \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

تكون هي المُصَغّرات التسعة ذات الرتبة 2×2 للمصفوفة A المعطاة .

قاعدة :

كقاعدة ، فإن المصفوفة المربعة من الرتبة $n\times n$ يكون لها n^2 من المُصَغّرات ذات الرتبة $(n-1)\times(n-1)$ وتنشأ هذه المُصَغّرات من حذف الصف i والعمود j اللذين يحويان العنصر a_{ij} من المصفوفة A ويُرمز له بالرمز M_{ij} .

تعريف :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ مصفوفة مربعة من الرتبة $n\times n$ ، يُعرف عامل العنصر a_{ij} *cofactor of* على أنه الكمية المقياسية α_{ij} حيث :

$$\boxed{\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}}$$

فعلى سبيل المثال ، عوامل المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ هي :

$$\begin{array}{lll} \alpha_{11} = -2 & , \ \alpha_{12} = 0 & , \ \alpha_{13} = 2 \\ \alpha_{21} = -13 & , \ \alpha_{22} = 6 & , \ \alpha_{23} = 11 \\ \alpha_{31} = 8 & , \ \alpha_{32} = -4 & , \ \alpha_{33} = -8 \end{array}$$

والآن يمكننا تعريف محدد أي مصفوفة من أي رتبة $n\times n$.

تعريف :

محدد المصفوفة المربعة $A=[a_{ij}]$ من الرتبة n يُحسب من أي صف أو أي عمود نختاره وذلك بضرب كل عنصر من عناصر هذا الصف (أو العمود) في عامله ثم جمع حواصل الضرب .. أي أنه (بالفك من الصف i) :

$$|A| = a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i2}\alpha_{i2} + a_{i3}\alpha_{i3} + \cdots\cdots + a_{in}\alpha_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\alpha_{ik}$$

أو بالفك من العمود j :

$$|A| = a_{1j}\alpha_{2j} + a_{2j}\alpha_{2j} + a_{3j}\alpha_{3j} + \cdots\cdots + a_{nj}\alpha_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\alpha_{kj}$$

فمثلاً ، إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ فإن قيمة محدد هذه المصفوفة تُعطى بـ (وذلك بالفك من الصف الأول) :

$$|A| = (1)\alpha_{11} + (4)\alpha_{12} + (-1)\alpha_{13} = (1)(-2) + (4)(0) + (-1)(2) = -4$$

وعلى القارئ أن يحاول فك المحدد بالطرق الستة المباحة وفي جميع الحالات لابد من الحصول على نفس القيمة .

قاعدة الإشارات :

من الطرق العملية المفيدة في فك المحددات ما يُسمى بقاعدة الإشارات للعناصر وهي القاعدة التي تحل محل $(-1)^{i+j}$ الموجودة في تعريف العامل وذلك كالآتي :

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}_{2\times2} , \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}_{3\times3} , \begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}_{4\times4} , \begin{vmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{vmatrix}_{5\times5}$$

وهكذا .. وعند فك المحدد تُؤخذ قاعدة الإشارات في الإعتبار عند أخذ قيمة العنصر .. فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{2}} & \underline{\underline{-1}} \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-4)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (-4)(-3) + (2)(7) + (1)(9) = 35$$

أو

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & \underline{\underline{1}} \\ 4 & 2 & \underline{\underline{-1}} \\ -1 & 3 & \underline{\underline{2}} \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + (2)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (1)(14) + (1)(9) + (2)(6) = 35$$

وهكذا .. كذلك

$$\begin{vmatrix} 1 & \underline{\underline{0}} & 5 & 2 \\ -1 & \underline{\underline{4}} & 1 & 0 \\ 3 & \underline{\underline{0}} & 4 & 1 \\ -2 & \underline{\underline{1}} & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0)\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + (4)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (0)\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -96$$

<u>لاحظ</u> أنه يمكننا إختصار الحسابات باستعمال الصف (أو العمود) الذي يحتوي على أكبر عدد من الأصفار .

<u>خواص المحددات *Properties of Determinants* :</u>

<u>خاصية (1) :</u>

إذا كان أحد صفوف (أو أعمدة) المصفوفة كُله أصفار فإن المحدد تنعدم قيمته .

<u>فمثلاً</u>

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0$$

<u>خاصية (2) :</u>

إذا ما تم تبديل صفين (أو عمودين) من محدد ما ، فإن قيمة المحدد تتغير إشارتها .

<u>فمثلاً</u>

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 35 \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \leftrightarrow & 3 & 1 \\ 2 & \leftrightarrow & 4 & -1 \\ 3 & \leftrightarrow & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = -35$$

خاصية (3) :

إذا تساوى صفان (أو عمودان) من محدد فإن قيمة المحدد تنعدم .

الإثبات :

من الخاصية (2) نجد أنه إذا ما بدلنا هذين الصفين (العمودين) فإن إشارة المحدد تتغير رغم أنه نفس المحدد ومنها نجد أن

$$|A| = -|A| \quad \Rightarrow \quad |A| = 0$$

فمثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad |A| = 0$$

دون فك .

خاصية (4) :

إذا كان أحد صفوف (أو أعمدة) محدد ما مضروباً في كمية مقياسية λ فإننا يمكننا أخذ هذه الكمية المقياسية λ عاملاً مشتركاً .

فمثلاً

$$B = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad |B| = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda a_{11})(a_{22}) - (\lambda a_{12})(a_{21}) = \lambda(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \lambda|A|$$

حيث $A = [a_{ij}]_{2\times2}$. والإثبات واضح لأي رتبة n .

فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{=35} = 70 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 8 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

خاصية (5) : $\|\lambda A\| = \lambda^n |A|$

الإثبات :

يتم الإثبات باستعمال الخاصية (4) وذلك بأخذ λ عاملاً مشتركاً من كل صف وبالتالي نحصل على λ^n خارج $|A|$.

فمثلاً

$$A=\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 8 & 4 & -2 \\ -2 & 6 & 2 \end{vmatrix}=(2)^3\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}}_{=35}=280$$

خاصية (6) :

حاصل ضرب عوامل عناصر أحد الصفوف (الأعمدة) في عناصر صف (عمود) من محدد ما يساوي صفراً .. أي أنه إذا كانت $A=|a_{ij}|_{n\times n}$ فإن

$$\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\alpha_{ml}=0 \quad , \quad m\neq k \qquad \& \qquad \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\alpha_{kl}=|A|$$

الإثبات :

إذا كانت $m=k$ فإن $\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\alpha_{kl}=|A|$

دعنا نستبدل a_{kl} بالقيمة المقياسية M_l .. فماذا يعني ذلك ؟ .. يعني الآتي :

$$\sum_{l=1}^{n} M_l\alpha_{kl}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{(k-1)1} & a_{(k-1)2} & \cdots\cdots & a_{(k-1)n} \\ M_1 & M_2 & \cdots\cdots & M_n \\ a_{(k+1)1} & a_{(k+1)2} & \cdots\cdots & a_{(k+1)n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{(n-1)1} & a_{(n-1)2} & \cdots\cdots & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

فإذا ما جعلنا

$$M_r = a_{rl} \quad , \quad r \neq k$$

فإن ذلك يعني أننا أضفنا صفاً من صفوف A (أي أن هناك صفان متساويان) وبالتالي فإن

$$\sum_{l=1}^{n} a_{rk}\alpha_{kl} = 0 \quad , \quad r \neq k$$

خاصية (7) :

إذا حصلنا على المصفوفة B من المصفوفة A وذلك بإضافة صف (أو عمود) من A مضروباً في كمية مقياسية إلى عناصر صف (عمود) آخر من A ، فإن $\boxed{|B| = |A|}$.

الإثبات :

لتكن

$$A = \lfloor a_{ij} \rfloor_{n\times n} \quad , \quad B = \lfloor b_{ij} \rfloor_{n\times n}$$

حيث

$$b_{kj} = a_{kj} + \lambda a_{mj} \quad , \quad b_{ij} = a_{ij} \; i \neq k$$

فعند فك المحدد $|B|$ من الصف k فإننا نجد

$$|B| = \sum_{l=1}^{n} b_{kl}\alpha_{kl} = \sum_{l=1}^{n} (a_{kl} + \lambda a_{ml})\alpha_{kl} = \underbrace{\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\alpha_{kl}}_{=|A|} + \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \lambda a_{ml}\alpha_{kl}}_{=0} = |A|$$

لاحظ أننا استخدمنا في الإثبات الخاصية (6) .

فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ (2)(1)+2 & (2)(0)+3 & (2)(1)+4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(لماذا ؟) .

خاصية (8) : $\boxed{|A| = |A^T|}$

الإثبات :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ وكانت $B=[b_{ij}]=A^T$ ، إذن بإيجاد $|A|$ (بالفك حول الصف i) وإيجاد $|B|=|A^T|$ (بالفك حول العمود i) :

$$|A|=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\alpha_{ik},|B|=|A^T|=\sum_{k=i}^{n}b_{ki}\tilde{\alpha}_{ki}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}\alpha_{ik}=|A|$$

وذلك لأن العناصر في صفوف A لها نفس عوامل العناصر المناظرة في أعمدة B .

فمثلاً

$$A=\begin{bmatrix}\underline{\underline{1}} & \underline{\underline{4}} & \underline{\underline{5}}\\ 2 & 0 & 6\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow B=A^T=\begin{bmatrix}\underline{\underline{1}} & 2 & 3\\ \underline{\underline{4}} & 0 & 1\\ \underline{\underline{5}} & 6 & 0\end{bmatrix}$$

ومنها

$$|A|=1(-6)-4(-18)+5(2)=-6+72+10=76$$
$$|B|=1(-6)-4(-18)+5(2)=-6+72+10=76=|A|$$

خاصية (9) :

إذا كان A و B مصفوفتين مربعتين من نفس الرتبة (n) فإن

$$|AB|=|A|\times|B|$$

وأحيل القارئ إلى الإثبات في (*Nearing E.D.*, 1967) .

خاصية (10) :

إذا كانت $a_{ij}=\tilde{a}_{ij}+b_{ij}$ لصف واحد i ، فإن

$$|A|=|\tilde{A}|+|B|$$

حيث $\tilde{A}$ هي المصفوفة الناتجة من المصفوفة A مع استبدال الصف i من A بالقيم $\tilde{a}_{ij}$ والمصفوفة B هي المصفوفة الناتجة من A مع استبدال الصف i من A بالقيم b_{ij} .

فمثلاً

$$\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2\\6 & 4\end{vmatrix}}_{=|A|}=\begin{vmatrix}1 & 2\\0+6 & 1+3\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{vmatrix}}_{=|\tilde{A}|}+\underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2\\6 & 3\end{vmatrix}}_{=|B|}=-8$$

خاصية (٢١) :

إذا كانت $A=[a_{ij}]$ فإن $\frac{d}{dt}|A|$ يكون عبارة عن المجموع لـــــ n من المحددات التي يُستبدل فيها كل صف على التوالي بتفاضل هــذا الصف .

وعلى القارئ أن ينظر إلى الإثبات في (*Deif A.S.* , 1982 , *p.*16) .

فمثلاً

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}x & 2x\\e^x & \ln x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\e^x & \ln x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 2x\\e^x & 1/x\end{vmatrix}=\ln x-2e^x+1-2xe^x$$

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix}x & 2x & 3\\0 & e^x & x^2\\e^x & 0 & \ln x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & e^x & x^2\\e^x & 0 & \ln x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 2x & 3\\0 & e^x & 2x\\e^x & 0 & \ln x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & 2x & 3\\0 & e^x & x^2\\e^x & 0 & 1/x\end{vmatrix}$$

وهكذا .

تمارين محلولة على المحددات :

(١) إثبت (بدون فك) أن

$$\begin{vmatrix}a+x & r-x & x\\b+y & s-y & y\\c+z & t-z & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & r & x\\b & s & y\\c & t & z\end{vmatrix}$$

الإثبات :

بطرح العمود الثالث من العمود الأول:

$$\begin{vmatrix}a+x & r-x & x\\b+y & s-y & y\\c+z & t-z & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}(a+x)-x & r-x & x\\(b+y)-y & s-y & y\\(c+z)-z & t-z & z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & r-x & x\\b & s-y & y\\c & t-z & z\end{vmatrix}$$

ثم بجمع العمود الثالث على الثاني :

$$\begin{vmatrix} a & r-x & x \\ b & s-y & y \\ c & t-z & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & (r-x)+x & x \\ b & (s-y)+y & y \\ c & (t-z)+z & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

---

(٢) إثبت (بدون فك) أن

$$\begin{vmatrix} 2a & 3r & x \\ 4b & 6s & 2y \\ -2c & -3t & -z \end{vmatrix} = (-12)\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

الإثبات :

بأخذ عامل مشترك (2) من العمود الأول وعامل مشترك (3) من العمود الثاني - ثم عامل مشترك (2) من الصف الثاني وعامل مشترك *(-1)* من الصف الثالث :

$$\begin{vmatrix} 2a & 3r & x \\ 4b & 6s & 2y \\ -2c & -3t & -z \end{vmatrix} = (2)\begin{vmatrix} a & 3r & x \\ 2b & 6s & 2y \\ -c & -3t & -z \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)\begin{vmatrix} a & r & x \\ 2b & 2s & 2y \\ -c & -t & -z \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)(2))\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ -c & -t & -z \end{vmatrix}$$

$$= (2)(3)(2)(-1)\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

$$= (-12)\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

---

(٣) إثبت (بدون فك) أن

$$\begin{vmatrix} a-3b & r-3s & x-3y \\ b-2c & s-2t & y-2z \\ 5c & 5t & 5z \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

الإثبات :

* بأخذ عامل مشترك (5) من الصف الثالث :

$$\begin{vmatrix} a-3b & r-3s & x-3y \\ b-2c & s-2t & y-2z \\ 5c & 5t & 5z \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} a-3b & r-3s & x-3y \\ b-2c & s-2t & y-2z \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

* بجمع ضعف الصف الثالث إلى الصف الثاني :

$$5\begin{vmatrix} a-3b & r-3s & x-3y \\ b-2c & s-2t & y-2z \\ c & t & z \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} a-3b & r-3s & x-3y \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

*وأخيراً بجمع ثلاثة أمثال الصف الثاني إلى الصف الأول ينتج المطلوب :

$$5\begin{vmatrix} a-3b & r-3s & x-3y \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} a & r & x \\ b & s & y \\ c & t & z \end{vmatrix}$$

---

(٤) إثبت أن محدد المصفوفة المثلثية هو حاصل ضرب عناصر القطر

الإثبات :

دع A مصفوفة مثلثية على الصورة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

بالفك من الصف الأخير :

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{nn}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-2)(n-2)} & a_{(n-2)(n-1)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(n-1)(n-1)} \end{vmatrix}$$

ثم بالفك من الصف الأخير :

$$|A|=a_{nn}a_{(n-1)(n-1)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-3)(n-3)} & a_{(n-3)(n-2)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{(n-2)(n-2)} \end{vmatrix}$$

وبتوالي الفك من الصف الأخير نصل في النهاية إلى :

$$|A|=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

وكذلك بالنسبة للمصفوفة المثلثية السفلى مع توالي الفك من الصف الأول دائماً . وحيث أن **المصفوفة القطرية** حالة خاصة من المصفوفة المثلثية ، يكون محدد المصفوفة القطرية هو أيضاً حاصل ضرب عناصر القطر .

(•) أوجد قيمة $\begin{vmatrix} 10 & -6 & -9 \\ 6 & -5 & -7 \\ -10 & 9 & 12 \end{vmatrix}$.

الحل :

* بجمع الصف الأول على الصف الثالث ثم بأخذ عامل مشترك (3) من الصف الثالث الناتج :

$$\begin{vmatrix} 10 & -6 & -9 \\ 6 & -5 & -7 \\ -10 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -6 & -9 \\ 6 & -5 & -7 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{3}} & \underline{\underline{3}} \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 10 & -6 & -3 \\ 6 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

* ثم بطرح العمود الثاني من الثالث :

$$3\begin{vmatrix}10 & -6 & -3\\ 6 & -5 & -7\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}10 & -6 & -3\\ 6 & -5 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=3(-1)\begin{vmatrix}10 & -3\\ 6 & -2\end{vmatrix}=-3(-20+18)=6$$

١-٢-٣٢ تمرينات محلولة على الباب الأول

(١) إثبت أنه إذا كانت A و B إبداليتين فإنه أيضاً :

(i) A^T و B^T تكونا إبداليتين.

(ii) A^{-1} و B^{-1} تكونا إبداليتين.

(iii) A و B^{-1} تكونا إبداليتين.

(iv) A^{-1} و B تكونا إبداليتين.

(v) A^n و B^m تكونا إبداليتين, حيث n و m أعداد صحيحة موجبة .

الإثبات :

A و B إبداليتان ، إذن $AB=BA$ ومنها

(i) $(AB)^T=(BA)^T \Rightarrow B^TA^T=A^TB^T$

أي أن A^T و B^T إبداليتان.

(ii) $(AB)^{-1}=(BA)^{-1} \Rightarrow B^{-1}A^{-1}=A^{-1}B^{-1}$

أي أن A^{-1} و B^{-1} إبداليتان.

(iii) $B^{-1}A=B^{-1}ABB^{-1}=B^{-1}BAB^{-1}=AB^{-1}$

أي أن A و B^{-1} إبداليتان.

أما بالنسبة لـ (iv) فهي مثل (iii) . وبانسبة لـ (v) نحاول (باستخدام الاستنتاج الرياضي *Mathematical Induction*) إثبات أن $A^nB=BA^n$ وذلك لجميع قيم n الوجبة الصحيحة :

* **عند $n=1$** : $AB=BA$ وهذا معطى .
* **نفرض أنه عند $n=k$** : $A^nB=BA^n$ ، بالضرب (من جهة اليسار) في A :

$$A^{k+1}B=\underbrace{AB}_{=BA}A^k=BAA^k=BA^{k+1}$$

وبالتالي فإنه إذا كانت النظرية صحيحة عند $n=k$ فإنها ستكون صحيحة عند $n=k+1$. وحيث أن النظرية صحيحة عند $n=1$ فإنها بالتالي تكون صحيحة عند جميع قيم n الصحيحة الموجبة . أي أن

$$A^n B = BA^n$$

لجميع قيم n الصحيحة الموجبة .

* **وبفرض أنه عند** $m = k$: $A^n B^k = B^k A^n$. بالضرب (من جهة اليمين) في B :

$$A^n B^{k+1} = \underbrace{A^n B^k}_{=B^k A^n} B = B^k \underbrace{A^n B}_{=BA^n} = B^k BA^n = B^{k+1} A^n$$

وبالتالي فإنه إذا كانت النظرية صحيحة عند $m = k$ فإنهـــا ســتكون صحيحـــة عنـــد $m = k+1$. وحيث أن النظرية صحيحة عند $m = 1$ فإنها بالتالي تكون صحيحة عنـــد جميع قيم m الصحيحة الموجبة . أي أن

$$A^n B^m = B^m A^n$$

لجميع قيم n, m الصحيحة الموجبة .

---

(٢) إثبت أنه إذا كانت كل من A و B مصفوفتين إبداليتين وحقيقيتين فإن المصفوفـــة الهرميتيـــة $H = A + iB$ تحقق

$$|H|^2 = |A|^2 \left| I + \left(A^{-1}B\right)^2 \right|$$

بفرض وجود معكوس لـــ A .

الإثبات :

بما أن H مصفوفة هيرميتية ، إذن $H^{*T} = H$ وبالتالي فإن

$$(A + iB)^{*T} = A + iB \quad \Rightarrow \quad A^T - iB^T = A + iB$$

وهذا بالطبع يؤدي إلى أن $A = A^T$ (أي أن A مصفوفة متماثلة) وأن $B = -B^T$ (أي أن B مصفوفة متماثلة بالسالب) . وبالتالي :

$$HH^T = (A + iB)(A + iB)^T = (A + iB)(A^T + iB^T) = (A + iB)(A - iB) = A^2 + B^2 + i(BA - AB)$$

$$= A^2 + B^2 \text{ (لماذا ؟)}$$

وبالتالي

$$|HH^T| = |A^2 + B^2| \qquad (1)$$

ولكن

$$|HH^T| = |H||H^T| = |H||H| = |H|^2$$

وأيضاً (لأن A و A^{-1} إبداليتان وكذلك B و A^{-1} إبداليتان) :

$$A^2 + B^2 = A^2 + A^2(A^{-1})^2 B^2 = A^2\left(I + (A^{-1})^2 B^2\right) = A^2\left(I + (A^{-1}B)^2\right)$$

إذن بالتعويض في (1) نصل إلى المطلوب :

$$|H|^2 = |A|^2 \left|I + (A^{-1}B)^2\right|$$

---

(٣) إثبت أنه إذا كان $T^{-1}AT = D_\lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n)$ ، فإن $A^k = TD_{\lambda^k}T^{-1}$ حيث :

$$D_{\lambda^k} = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots\cdots, \lambda_n^k)$$

الحل :

$$T^{-1}AT = D_{\lambda^k} \quad \Rightarrow \quad A = TD_{\lambda^k}T^{-1}$$

وبالتالي

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots\cdots A}_{k\,\text{times}}$$

أي أن

$$A^k = \underbrace{TD_\lambda T^{-1}.TD_\lambda T^{-1}.TD_\lambda T^{-1}\cdots\cdots TD_\lambda T^{-1}}_{k\,\text{times}} = T\underbrace{D_\lambda D_\lambda D_\lambda \cdots\cdots D_\lambda}_{k\,\text{times}} T^{-1} = T(D_\lambda)^k T^{-1}$$

$$= TD_{\lambda^k}T^{-1} \qquad (\text{لماذا ؟})$$

---

(٤) إثبت أنه لأي مصفوفة مربعة A وأي عدد صحيح موجب n ، فإن $\left(A^{-1}\right)^n = \left(A^n\right)^{-1}$.

الإثبات :

حيث أن

$$(A^n)(A^n)^{-1} = I$$

إذن (بالضرب من اليسار في $\left(A^{-1}\right)^n$) :

$$\underline{\left(A^{-1}\right)^n A^n}\left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n \quad \Rightarrow \quad \left(AA^{-1}\right)^n\left(A^n\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$$

(لأن A و A^{-1} دامجتان) . وبالتالي

$$\left(A^{-1}\right)^n = \left(A^n\right)^{-1}$$

---

(٥) إثبت أنه إذا كانت المصفوفة A متماثلة فإن A^{-1} (إن وُجِدت) تكون أيضاً متماثلة .

الإثبات :

$$AA^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad \left(AA^{-1}\right)^T = I \quad \Rightarrow \quad \left(A^{-1}\right)^T\left(A^T\right) = I$$

وبالضرب من اليمين في $\left(A^T\right)^{-1}$:

$$\left(A^{-1}\right)^T\left(A^T\right)\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^T\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1} = A$$

أي أن A^{-1} أيضاً متماثلة .

ملحوظة : هذا التمرين يستعمل للتأكد من صحة حسابات المعكوس في حالة المصفوفة المتماثلة .

---

(٦) إثبت أن $tr\left(A_{m\times n} : B_{n\times m}\right) = tr\left(B_{m\times n} \cdot A_{n\times m}\right)$.

الإثبات :

دع

$$A_{m\times n} = \left[a_{ij}\right] \quad , \quad B_{m\times n} = \left[b_{ij}\right] \quad , \quad C_{m\times m} = AB = \left[c_{ij}\right] \quad , \quad D_{n\times n} = BA = \left[d_{ij}\right]$$

إذن :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj} \quad , \quad d_{ij} = \sum_{kk=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj}$$

وبالتالي :

$$tr(AB) = tr(C) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{ki} \qquad (1)$$

$$tr(BA)=tr(D)=\sum_{i=1}^{n} d_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\,a_{ki} \qquad (2)$$

دع $i \leftarrow k \,,\, k \leftarrow i$ في (2) :

$$tr(BA)=tr(D)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik}\,a_{ki}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,b_{ki} \qquad (3)$$

ومن (1) و (3) ينتج أن : $tr(AB)=tr(BA)$

---

(٧) إثبت أنه لأي مصفوفة متماثلة بالسالب (*skew-symmetric*) A وأي متجـــه حقيقـــي (*real* *x vector*)، فإن $x^T Ax=0$.

الإثبات :

دع

$$x^T Ax=\alpha \qquad (1)$$

حيث α كمية مقياسية (المطلوب إثبات أنها تساوي صفراً) . من العلاقة (1) والإستفادة من أن A متماثلة بالسالب ($A^T=-A$) نستنتج أن :

$$\left(x^T Ax\right)^T=\alpha^T=\alpha \quad \Rightarrow \quad x^T A^T x=\alpha \Rightarrow x^T Ax=-\alpha \qquad (2)$$

وبجمع (1) و (2) نجد أن :

$$2\left(x^T Ax\right)=0 \quad , \quad x^T Ax=0$$

---

(٨) إثبت أن $(A+B)^T=A^T+B^T$.

الإثبات :

دع $A=\left[a_{ij}\right] \;,\; B=\left[b_{ij}\right]$

إذن $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$

وبالتالي

$$\left[A+B\right]^T=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]^T=\left[a_{ji}+b_{ji}\right]=\left[a_{ji}\right]+\left[b_{ji}\right]=A^T+B^T$$

---

(٩) إثبت أنه لأي مصفوفة مربعة A من رتبة n وأي كمية مقياسية k ، فإن $|kA| = k^n|A|$.

الإثبات :

دع $A = [a_{ij}]$ ، إذن

$$kA = [ka_{ij}] \Rightarrow |kA| = |[ka_{ij}]| = \underbrace{k \cdot k \cdot k \cdots\cdots k}_{n\text{times}} \cdot |[a_{ij}]| = k^n|A|$$

لاحظ أن kA هي عملية ضرب الثابت المقياسي k في جميع عناصر المصفوفة A ، أما $k|A|$ فهي عملية ضرب الثابت k في أحد صفوف أو أعمدة المحدد $|A|$.

---

(١٠) أوجد طول المتجه $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ثم حوله إلى متجه وحدة (*normalize it*) .

الحل : دع $x = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، إذن

$$\|x\|^2 = x^{*T}x = (1+i \quad 1i \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2+2+1+0 = 5 \Rightarrow \|x\| = \sqrt{5}$$

وبالتالي

$$x_n = \frac{x}{\|x\|} = \begin{pmatrix} (1-i)/\sqrt{5} \\ (1+i)/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1-i \\ 1i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

(١١) إثبت أن $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ لكل $\alpha \in C$ و $x \in C^n$.

الحل :

$$\|x\| = \sqrt{x^{*T}x} \Rightarrow \|\alpha x\| = \sqrt{\alpha^* x^{*T} \alpha x} = \sqrt{\alpha^* \alpha}\sqrt{x^{*T}x} = |\alpha|\|x\|$$

---

(١٢) إثبت أن المصفوفة $G = I - 2ww^T$ تكون مصفوفة متوحدة orthonormal حيث w متجهة طوله الوحدة ($\|w\| = 1$) .

الإثبات :

$$G = I - 2ww^T \Rightarrow G^T = (I - 2ww^T)^T = I - 2(ww^T)^T = I - 2(w^T)^T w^T = I - 2ww^T = G$$

وبالتالي :

$$GG^T = [I - 2ww^T][I - 2ww^T] = I - 2ww^T - 2ww^T + 4w\underline{\underline{w^T w}}w^T$$

$$= I - 4ww^T + 4w\underline{\underline{\|w\|^2}}w^T = I - 4ww^T + 4ww^T = I$$

إذن G مصفوفة متوحدة .

---

(١٣) إذا كانت $D = (I + A)^{-1} A$ هي مصفوفة قطرية غير شاذة nonsingular diagonal matrix ما هو الشرط على المصفوفة A لكي تصبح هي الأخرى مصفوفة قطرية ؟ .

الحل :

$$D = (I + A)^{-1} A \Rightarrow (I + A)D = A \Rightarrow D + AD = A$$

$$\Rightarrow D = A - AD \Rightarrow A(I - D) = D$$

$$\Rightarrow A = D(I - D)^{-1}$$

ولكن دع $D = [d_{ii}]$ ، وبالتالي :

$$I - D = [1 - d_{ii}]$$

وكذلك

$$\{I - D\}^{-1} = \left[\frac{1}{1 - d_{ii}}\right]$$

وبالتالي

$$D(I - D)^{-1} = \left[\frac{d_{ii}}{1 - d_{ii}}\right]$$

أي أن

$$a_{ii} = \frac{d_{ii}}{1 - d_{ii}}$$

وبالتالي لكي تكون A مصفوفة قطرية يجب أن يكون $d_{ii} \neq 1$ وذلك لجميع قيم i .

---

(١٤) إثبت أن

(i) $\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & I_p \end{vmatrix} = |A|$

(ii) $\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|$

(iii) $\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}|$ وذلك إذا كانت A_{11}^{-1} موجودة وكانت A_{21} , A_{11} إبداليتين *Commute* .

الإثبات :

(i) دعنا نفك المحدد $\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & I_p \end{vmatrix}$ من العمود الأخير إلى العمود رقم p :

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & I_p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & & & 0 & & & \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1}_{p\text{columns}} \end{vmatrix} = (1)\begin{vmatrix} A & & & 0 & & \\ & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1}_{(p-1)\text{columns}} \end{vmatrix}$$

$$= (1)(1)\begin{vmatrix} A & & 0 & & \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 1}_{(p-2)\text{columns}} \end{vmatrix}$$

وبالإستمرار هكذا :

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & I_p \end{vmatrix} = \underbrace{(1)(1)(1)\cdots(1)}_{(p-1)\text{times}} \begin{vmatrix} A & 0 \\ b_{11} & 1 \end{vmatrix} = |A|$$

(ii) يمكننا تحليل المصفوفة $\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$ إلى الآتي :

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ B & I \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{vmatrix}$$

وباستخدام نتائج الجزء (i) نستنتج أن :

$$\begin{vmatrix} A & 0 \\ B & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C|$$

(iii) بضرب المصفوفة $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ من اليسار في $\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}$ فإننا نحصل على :

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & -A_{21}A_{11}^{-1}A_{22} + A_{22} \end{bmatrix}$$

وبالتالي ، بأخذ المحدد للطرفين :

$$|I|.|I|.\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = |A_{11}|\,|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|$$

وذلك باستخدام نتائج الجزء (ii) . ولكن $|I| = 1$ ، فإننا نحصل على المطلوب إذا ما استخدمنا الشروط الموضوعة .

---

(١٥) إثبت (بدون فك) أن :

$$\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

الإثبات :

* باستبدال الصف الأول بـــ (الصف الأول - الصف الثاني) ، الصف الثاني بـــ (الثاني - الثالث) والصف الثالث بـــ (الثالث - الرابع) والإبقاء على الصف الرابع :

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} a^2 & a & 1 & bcd \\ b^2 & b & 1 & acd \\ c^2 & c & 1 & abd \\ d^2 & d & 1 & abc \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2-b^2 & a-b & 0 & bcd-acd \\ b^2-c^2 & b-c & 0 & acd-abd \\ c^2-d^2 & c-d & 0 & abd-abc \\ d^2 & d & \underline{\underline{1}} & abc \end{vmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-1}}\begin{vmatrix} a^2-b^2 & a-b & bcd-acd \\ b^2-c^2 & b-c & acd-abd \\ c^2-d^2 & c-d & abd-abc \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} (a-b)(a+b) & a-b & -cd(a-b) \\ (b-c)(b+c) & b-c & -ad(b-c) \\ (c-d)(c+d) & c-d & -ab(c-d) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} a+b & 1 & cd \\ b+c & 1 & ad \\ c+d & 1 & ab \end{vmatrix}$$

* ثم باستبدال الصف الأول بـ (الأول - الثاني) والثاني بـ (الثاني - الثالث) والإبقاء على الصف الثالث :

$$\Delta = (a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} a-c & 0 & -d(a-c) \\ b-d & 0 & -a(b-d) \\ c+d & \underline{\underline{1}} & ab \end{vmatrix}$$

$$= -1(a-b)(b-c)(c-d)\begin{vmatrix} a-c & -d(a-c) \\ b-d & -a(b-d) \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(b-c)(c-d)(a-c)(b-d)\begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

---

(١٦) إثبت (بدون فك) أن :

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & \cdots & a \\ a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}_{n\times n} = b^{n-1}(na+b)$$

الإثبات :

* باستبدال الصف الثاني بـ (الثاني - الثالث) :

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ a & a & a+b & a & \cdots & a \\ a & a & a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

* ثم باستبدال الصف الثالث بـ (الثالث - الرابع) :

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & -b & \cdots & 0 \\ a & a & a & a+b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & a & \cdots & a+b \end{vmatrix}$$

* ثم باستبدال الصف الرابع بـ (الرابع - الخامس) ، ... وهكذا واستبدال الصف رقم n-1 بـ (الصف رقم (n-1) - الصف رقم n) :

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a & \cdots\cdots & a \\ 0 & b & -b & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & -b & \cdots\cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots b & -b \\ a & a & a & a & \cdots a & a+b \end{vmatrix}$$

* و باستبدال الصف الأخير (رقم n) بـ (الأخير - الأول) :

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} a+b & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & -b & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

* وباستبدال العمود الأول بـ (العمود الأول + العمود الأخير رقم n):

$$\therefore \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2a+b & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & -b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

* وباستبدال العمود الثاني بـ (العمود الثاني + العمود قبل الأخير رقم n-1):

$$\therefore \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3a+b & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & -b & \cdots & 0 \\ -b & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -b \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & b & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

* وباستبدال العمود الثالث بـ (العمود الثالث + العمود رقم n-2)وتوالي نفس العمليات ، نحصل على :

$$\therefore \qquad \Delta = \begin{vmatrix} na+b & a & a & a & \cdots & a \\ 0 & b & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b & -b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & b & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix}$$

وهي مصفوفة مثلثية ، ومن ثم تكون قيمة المحدد هي حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي . أي أن :

$$\Delta = (na+b)b^{n-1}$$

وهو المطلوب إثباته .

ملحوظة : كحالة خاصة للتمرين السابق ($a=1, b=-\lambda, n=4$) :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)[-\lambda]^3$$

وهذا يفيد في حساب القيم الذاتية لمثل هذه النظم (أنظر الباب الثالث) .

١-٣ مسائل على الباب الأول

(١) إثبت التالي لأي مصفوفة حقيقية مربعة A :

(i) $\left(A+A^T\right)$ مصفوفة متماثلة . (ii) $\left(A-A^T\right)$ مصفوفة متماثلة بالسالب .

(٢) إذا كان حاصل الضرب BA للمصفوفتين A , B مُعرفاً ، أثبت أن $(AB)^T = B^T A^T$.

(٣) أوجد الجزء المتماثل والجزء المتماثل بالسالب للمصفوفة المربعة الحقيقية A .

(٤) أوجد الجزء الهرميتي والجزء الهرميتي بالسالب للمصفوفة المربعة المركبة A .

(٥) إثبت أنه إذا كانت A هيرميتية فإن $x^{*T}Ax$ تكون كمية حقيقية .

(٦) إثبت أنه لأي مصفوفة A تكون AA^T و A^TA مصفوفات متماثلة .

(٧) إثبت أن A^2 تكون متماثلة إذا ما كانت المصفوفة A متماثلة أو متماثلة بالسالب .

(٨) إذا كانت A هيرميتية ، أثبت أن $P^{*T}AP$ تكون أيضاً هيرميتية وذلك لأي مصفوفة P .

(٩) إثبت أن A تكون هيرميتية بالسالب إذا ما كانت iA هيرميتية ($i=\sqrt{-1}$) .

(١٠) إثبت أن المصفوفتين A , B تكونا إبداليتين إذا وإذا فقط كانت $(A-kI)$ و $(B-kI)$ إبداليتين وذلك لجميع القيم المقياسية k .

(١١) إثبت أن A , B دوريتان إذا ما كان $AB=A$ و $BA=B$.

(١٢) إثبت أنه إذا كانت A دورية ، فإن $(I+A)^n = I+\left(2^n-1\right)A$ وذلك لكل عدد صحيح موجب n .

(١٣) إثبت أن A تكون مترقية إلى الوحدة إذا وإذا فقط كان $(I-A)(I+A)=O$.

(١٤) إثبت أنه إذا كانت A مترقية إلى الوحدة ، فإن $\frac{1}{2}(I+A)$ و $\frac{1}{2}(I-A)$ تكونا دوريتين .

(١٥) إذا كانت V مصفوفة صفرية من رتبة n فإن :

$$(I+V)^{-1} = I - V + V^2 - V^3 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}V^{n-1}$$

(١٦) إثبت التالي :

(i) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$ (ii) $tr\left(T^{-1}AT\right)=trA$

(١٧) إثبت أنه إذا كانت $A\,,B$ غير شاذتين ، فإن $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

(١٨) إذا كانت $(I+A)^{-1}$ موجودة ، أثبت أن $(I+A)^{-1}$ و $(I-A)$ تكونا إبداليتين .

(١٩) إثبت أن $(A+B)A^{-1}(A-B)=(A-B)A^{-1}(A+B)$ حيث B ، A مصفوفتان مربعتان والمصفوفة A غير شاذة .

(٢٠) إذا كانت $f(A)=a_0I+a_1A+\cdots\cdots+a_mA^m=O$ وكانت $B=P^{-1}AP$ ، فاثبت أن :

$$f(B)=a_0I+a_1B+\cdots\cdots+a_mB^m=O$$

(٢١) أوجد متجه الوحدة العمودي على كلٍ من $\begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}$.

(٢٢) إثبت أن

$$\|x-y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2-2\|x\|\|y\|.\cos\theta$$

حيث $x,y\in R^3$ و θ هي الزاوية بين المتجهين $x\,,y$.

(٢٣) إثبت أن المتجهات $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ مستقلة خطياً ، ثم حولها إلى متجهات متوحدة *orthonormal* .

(٢٤) إثبت أنه إذا كانت $A\,,B$ مصفوفتين متعامدتين ، فإن AB تكون أيضاً متعامدة .

(٢٥) إثبت أنه إذا كانت A مصفوفة متوحدة *orthonormal* ، فإن

(i) $|A|=\pm 1$ (ii) $A^T\,,A^{-1}$ تكونا متعامدتين .

(٢٦) إذا كانت

$$A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & 0 & \cos\theta\\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta & 0\\ 0 & \cos\theta & 0 & -\sin\theta\end{bmatrix}$$

فإن $A\,,B\,,A^{-1}\,,B^{-1}$ تكون مصفوفات متعامدة .

(٢٧) أوجد معكوس المصفوفة $\left[\begin{array}{c|c}B & C\\ \hline O & D\end{array}\right]$ حيث B , D مصفوفتان غير شاذتين .

(٢٨) حل المعادلات الخطية الآتية :

$$\begin{bmatrix}5 & 3 & 0 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 6\\ 0 & 0 & 3 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\\ 5\end{bmatrix}$$

(٢٩) إذا كانت

$$V_n=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \kappa_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}_{n\times n}$$

هي مصفوفة فاندرموند V Vandermonde من رتبة n ، إثبت أن :

(i) $|V_2|=(\lambda_2-\lambda_1)$

(ii) $|V_2|=(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)|V_2|$

(iii) وبوجهٍ عام : $|V_n|=(\lambda_n-\lambda_{n-1})(\lambda_n-\lambda_{n-2})(\lambda_n-\lambda_{n-3})\cdots(\lambda_n-\lambda_1)|V_{n-1}|$.

(vi) $|V_n|=\prod\limits_{n\ge j>i\ge 1}(\lambda_j-\lambda_i)$

(٣٠) إثبت أن $A^i\to O$ إذا كان $\|A\|_1<1$ (إستعمل $\|A^i\|_1\le\|A\|_1^i$) .

(٣١) إثبت أن

$$\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}^n=\begin{vmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{1}{2}n(n-1)\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{vmatrix}$$

حيث n عدد صحيح موجب .

(٣٢) تُسمى المصفوفات

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ \underline{\underline{0}} & 1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ \underline{\underline{0}} & 1 & 3 & 5 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & 4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 & -1 & 2 \\ \underline{\underline{0}} & 4 & -1 & 0 & 3 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & 1 & 2 & -1 \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} & 3 & 4 \end{bmatrix}, \ldots\ldots$$

بـــ **مصفوفــات هيســـنبرج** ***Hessenberg Matrices*** (أي المصفوفـــات الـــتي فيهـــا $a_{ij} = 0 , \forall i \geq j+1$) . إثبت أن هذه المصفوفات دائماً غير شاذة .

(٣٣) إثبت بدون فك أن :

$$\begin{vmatrix} na_1 + b_1 & na_2 + b_2 & na_3 + b_3 \\ nb_1 + c_1 & nb_2 + c_2 & nb_3 + c_3 \\ nc_1 + a_1 & nc_2 + a_2 & nc_3 + a_3 \end{vmatrix} = (n+1)(n^2 - n + 1) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(٣٤) إذا كان $Ax = b$ حيث عناصر A , x , b تنتمي لـــ $\mathbf{C}$ ، أثبت أن :

$$x_r = A_r^{-1} A_m \left(A_r + A_m A_r^{-1} A_m\right)^{-1} \left(b_m - A_m A_r^{-1} b_r\right) + A_r^{-1} b_r$$
$$x_m = \left(A_r + A_m A_r^{-1} A_m\right)^{-1} \left(b_m - A_m A_r^{-1} b_r\right)$$

حيث A_r, x_r, b_r هي **الأجزاء الحقيقية** ***real parts*** للمصفوفات A , x , b علـــى الـــترتيب و A_m, x_m, b_m هي **الأجزاء التخيلية** ***imaginary parts*** لهذه المصفوفات .

(٣٥) إثبت أن $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ إذا وإذا فقط كان x , y متعامدين .

(٣٦) دع $v_1, v_2, v_3, \cdots, v_n$ مجموعة من الأعمدة المتوحدة ، ودع v متجه في نفس فراغ المتجهـــات السابقة .

أوجد المتجه v_0 (في الصورة $v_0 = v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$) المتعامد على المتجهات $\{v_i\}$.

الباب الثاني

المعادلات الخطية

LINEAR SYSTEMS OF EQUATIONS

في هذا الباب يتم تحليل المعادلات الخطية من عدة وجهات نظر ؛ تحليلياً بالتفصيل آخذين في الاعتبار جميع الحالات ؛ عدد المعادلات يساوي عدد المجاهيل وعدد المعادلات لايساوي عدد المجاهيل .. كذلك عددياً شارحين عدة خوارزميات هامة تنتهي بـــ *SOR* وهو من الخوارزميـــات المتقدمـــة المفيدة في حل نظم المعادلات عددياً .

يبدأ الباب بشرح مفهوم المعكوس *inverse* بتوسعٍ مع طرح أكثر من طريقة لإيجاد المعكوس ثم حل المعادلة الخطية بطريقة المعكوس .. كذلك كان لابد من شرح مفهوم **الدرجة** ***rank*** وطـــرح أكثر من طريقة لإيجاد درجة المصفوفة .

٢-١ الدرجة والمعكوس *RANK AND INVERSE*

٢-١-١ التكافؤ والتحويلات الأساسية

Equivalence and Elementary Transformations

يمكننا الحصول على مصفوفة B مكافئة *Equivalent* لمصفوفة أخرى A (ويُكتب ذلك رمزياً على الصورة : $B \sim A$) إذا ما حصلنا على B من A بعدة عمليات تُسمى **عمليات الصف البســـيط** ***Simple Row Operations*** وهذه العمليات تتلخص في الآتي :

- ضرب أحد الصفوف في ثابت .
- جمع أحد الصفوف على صف آخر بعد ضرب كليهما أو أحدهما في ثابت .

فمثلاً إذا كانت :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإنه بضرب الصف الأول في 2 :

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim A$$

وبجمع الصف الأول من A على صفها الثاني :

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim A$$

وبطرح الصف الأول منA من صفها الثالث :

$$B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim A$$

وبإبدال الصف الأول والثاني من A :

$$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim A$$

ويمكن إجراء **عمليات الأعمدة البسيطة** ***Simple Column Operations*** بطريقة مُشابهه .. فبــإبدال العمود الأول من A مع عمودها الثالث :

$$B_5 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim A$$

وهكذا .. مع ملاحظة أن العلامة (~) علامة **تكافؤ** *Equivalence* وليس علامة " **تقريباً تساوي** "، فأي تغيير يحدث في المصفوفة A يُنتج $B_i \neq A$ ، ولكن إضافة عمليات الصف البسيط (أو الأعمدة البسيطة) يجعلنا نحصل على $B_i \sim A$.

وتُسمى التحويلات الأساسية بعمليات الصف البسيط إذا ما تركزت على الصفوف **فقط** ، في حين تُسمى بعمليات الأعمدة البسيطة إذا ما تركزت على الأعمدة . وتلعب هذه العمليات دوراً هاماً في حل المعادلات الخطية وبعض التطبيقات الأخرى مثل إيجاد ما يُسمى بـ **الدرجة** ***Rank*** و **المعكوس** ***Inverse*** .

٢-١-٢ درجة المصفوفة *Rank of a Matrix*

تُعرف درجة المصفوفة بأنها عدد المتجهات المستقلة *Independent Vectors* في المصفوفة وبالتالي إذا كانت المصفوفة A من رتبة $m \times n$ وكانت $\rho = \rho(A)$ هي درجة المصفوفة A ، فإن :

$$\rho(A) \le m \le n \qquad \text{أو} \qquad \rho(A) \le n \le m$$

وهذا معناه أن هناك ρ من المتجهات المستقلة سواء في الصفوف أو الأعمدة ، وبالتالي يكون هناك إما $(n-\rho)$ أو $(m-\rho)$ من المتجهات المعتمدة *Dependent Vectors* . ومن هذا التعريف نستنتج الآتي :

(i) إذا كانت I_n هي مصفوفة الوحدة من رتبة $n \times n$ ، فإن :

$$\boxed{\rho(I_n) = n}$$

(ii) إذا كانت D_n هي مصفوفة قطرية من رتبة $n \times n$ ، وكانت $d_{ii} \neq 0$ لجميع قيم i ، فإن :

$$\boxed{\rho(D_n) = n}$$

(iii) إذا كانت U_n هي مصفوفة مثلثية عليا من رتبة $n \times n$ ، وكانت $u_{ii} \neq 0$ لجميع قيم i ، فإن :

$$\boxed{\rho(U_n) = n}$$

(iv) إذا كانت L_n هي مصفوفة مثلثية سفلى من رتبة $n \times n$ ، وكانت $l_{ii} \neq 0$ لجميع قيم i ، فإن :

$$\boxed{\rho(L_n) = n}$$

(v) إذا كانت O هي مصفوفة صفرية فإن :

$$\boxed{\rho(O)=0}$$

(vi) لأية مصفوفة A :

$$\boxed{\rho(A)=\rho(A^T)}$$

(vii) لأية مصفوفة A :

$$\boxed{\rho\begin{pmatrix} A \\ \hdashline O \end{pmatrix}=\rho(A)}$$

وعلى القارئ محاولة إثبات مجموعة القوانين التالية :

(١) إذا كانت $A=A_{m\times n}$ ، فإن $\rho(A)\le \min\{m,n\}$

(٢) $\rho(A+B)\le\rho(A)+\rho(B)$

(٣) $\rho(AB)\ge\rho(A)+\rho(B)-n$ حيث n هي عدد صفوف B

(٤) $\rho\begin{bmatrix} A & \vdots & O \\ \hdashline O & \vdots & B \end{bmatrix}=\rho(A)+\rho(B)$

(٥) $\rho(AB)\le\min\{\rho(A),\rho(B)\}$

(٦) إذا كانت $A=A_{m\times n}, B=B_{n\times m}$ وكان $m>n$ ، فإن المصفوفة BA تكون شاذة (أنظر تمرين ٥ فصل ٢-٤) .

(٧) $\rho(\alpha A)=\rho(A)$ حيث α كمية مقياسية

(٨) إذا كانت $A=A_{m\times n}$ وكان $m>n$ ، فإن AA^{*T} تكون شاذة

(٩) إذا كانت $\rho(A_{m\times n})=m<n$ ، فإن AA^{*T} تكون غير شاذة

(١٠) إذا كانت A غير شاذة فإن $\rho(AB)=\rho(B)$

(١١) $\rho(A-B)\ge\rho(A)-\rho(B)$

(١٢) $\rho(AB)+\rho(BC)\le\rho(B)+\rho(ABC)$

(١٣) إذا كانت $A=A_{m\times n}, B=B_{n\times p}$ وكان $AB=O$ ، فإن

$\rho(A)+\rho(B)\le n$

(١٤) $\rho(A^TA)=\rho(A)$

٢-١-٢-١ طرق إيجاد درجة المصفوفة :

أ - باستخدام التعريف :

وذلك بحل المعادلة الأساسية

$$\sum_{i=1}^{\min\{n,m\}} \alpha_i x_i = 0$$

حيث $\{x_i\}$ هي صفوف (أو أعمدة) المصفوفة A ، ومن الحل يمكن معرفة عدد المتجهـــات المستقلة في هذه المجموعة وتكون الدرجة مساوية لهذا العدد .

مثال : أوجد درجة المصفوفة $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -3 & 2 & 8 \\ 4 & 1 & -7 \end{bmatrix}_{4\times 3}$.

الحل :

لاحظ هنا أن عدد الصفوف $m(=4)$ أكبر من عدد الأعمدة $n(=3)$ ، لذا فإن $\rho(A)\le 3$.

وبحل المعادلات :

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\-3\\4\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\-5\\8\\-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

نجد أن $\alpha_1=2 \quad , \quad \alpha_2=-1 \quad , \quad \alpha_3=1$

(يمكنك التأكد بالتعويض المباشر) . أي أن هناك قيم لـــ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ (ليست جميعها أصفاراً) تحقق المعادلة السابقة وبالتالي فهناك إعتمادية بين المتجهـــات الثـــلاث ، أي أن $\rho(A)\ne 3$.

ولكن (على سبيل المثال) المتجه $\begin{pmatrix}1\\-5\\8\\-7\end{pmatrix}$ لا يعتمد على المتجه $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$ (**لماذا ؟**) وبالتالي فـــإن $\rho(A)=2$.

والطريقة السابقة تعتمد على حل المعادلات في البارامترات α_i وهي لذلك صعبة وغير عملية في الأبعاد الكبيرة .

ب ـــ إيجاد درجة المصفوفة عن طريق المُصغّرات Minors

المصفوفة A غير الصفرية يكون لها الدرجة ρ إذا كان على الأقل واحد من محدداتها الفرعية من رتبة ρ لايساوي الصفر بينما كل محدداتها الفرعية من رتبة $\rho+1$ تكون أصفاراً .

مثال : اختبر درجة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&3&4\\3&5&7\end{bmatrix}$

الحل :

(i) $|A|=0$ ومن ثم فإن $\rho(A)<3$.

(ii) بأخذ كل المحددات الفرعية الثنائية الممكنة :

$$\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\2&4\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\3&5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\3&7\end{vmatrix},\ldots\ldots etc$$

نجد أن هناك على الأقل واحد منها لايساوي صفراً ، ومن ثم فإن $\rho(A)=2$.

مثال : أوجد درجة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2&-3&4\\3&-1&2&1\\1&-5&8&-7\end{bmatrix}$.

الحل :

(i) بأخذ كل المحددات الثلاثية الممكنة (عددها أربعة .. **لماذا ؟**) نجد أن جميعها أصفاراً (**أثبت ذلك**) وبالتالي فإن $\rho(A)<3$.

(ii) ولكن على الأقل المحدد الثنائي الفرعي $\begin{vmatrix}1&2\\3&-1\end{vmatrix}\neq 0$ ، إذن $\rho(A)=2$.

جـــ ـــ إيجاد درجة المصفوفة عن طريق التحويلات الأساسية :

بعد إجراء بعض التحويلات الأساسية على المصفوفة A فإننا نحصل على مصفوفة B تكافئ A (أي $B\sim A$) . ومن وجهة نظر درجة المصفوفة فإن $\rho(A)=\rho(B)$. فإذا كانت المصفوفة المكافئة B مثلثية أو قطرية أو مصفوفة وحدة يمكن تحديد درجتها بمجرد النظر ومن ثم درجة المصفوفة A .

مثال : أوجد درجة المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ 5 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}$.

الحل :

- بضرب الصف الأول في (-2) وإضافته على الصف الثاني :

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}=B$$

- وبإضافة الصف الأول على الصف الثالث :

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}=C$$

- وبضرب الصف الثاني في (-1) وإضافته على الصف الثالث :

$$C=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 5 & -3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 5 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=D$$

أي أن

$$A\sim B\sim C\sim D$$

ولكن بمجرد النظر نلاحظ أن $\rho(D)=2$ (**لماذا ؟**) وبالتالي فإن $\rho(A)=2$.

ملاحظات :

(i) إضافة متجه صفري *zero vector* لا تغير من درجة المصفوفة .

(ii) المصفوفة D السابقة تُسمى **المصفوفة الدرجية** (السُّلمية) ***Canonical Matrix*** (وهي المصفوفة التي يمكن قراءة درجتها بمجرد النظر . ويمكن تحويل أي مصفوفة إلى مصفوفة درجية (سُلمية) إذا ما إتُبِعت القواعد السابق إتباعها في المثال السابق للوصول إلى المصفوفة D .

(iii) إذا كانت A مصفوفة مربعة وغير شاذة فإن :

$$A \sim I \quad \Rightarrow \quad \rho(A) = n$$

أما إذا كانت A مصفوفة مربعة وشاذة فإن :

$$A \sim \begin{bmatrix} B \\ -- \\ O \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \rho(A) = \rho(B) < n$$

وإذا كانت A مصفوفة مستطيلة *Rectangular Matrix* فإن هناك مصفوفة درجية B تكون مكافئة لـ A بحيث تكون $\rho(A)$ مساوية لعدد الصفوف غير الصفرية للمصفوفة B .

٢-١-٣ معكوس المصفوفة *Inverse of a Matrix*

٢-١-٣-١ معكوس المصفوفة المربعة

المصفوفة المربعة A يكون لها معكوساً وحيداً *Unique Inverse* (ويُرمز له بالرمز A^{-1}) بحيث يكون :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

وهناك طرق كثيرة لإيجاد معكوس المصفوفة المربعة سنذكرها فيما يلي :

أ ــ المعكوس عن طريق المصفوفة المُلحقة *Adjoint Matrix*

تُعرف المصفوفة المُلحقة للمصفوفة A (ويُرمز لها بالرمز A_{adj}) على أنها :

$$A_{adj} = \lfloor \alpha_{ji} \rfloor$$

حيث يُسمى α_{ij} **بالعامل *Cofactor*** للصف i والعمود j ويُحسب كالآتي :

$$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

حيث M_{ij} هو **المُصغّر *Minor*** للصف i والعمود j . ويكون المعكوس هو

$$A^{-1} = \frac{A_{adj}}{|A|}$$

وذلك بافتراض أن A غير شاذة ($|A| \neq 0$) ، ويمكن مراجعة الإثبات في المرجع (*Ayres A.,* 1974) .

مثال : إحسب معكوس المصفوفة $S=\begin{bmatrix}5&4&0\\0&3&2\\0&1&0\end{bmatrix}$.

الحل : $|S|=5\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}=5(-2)=-10\neq 0$

إذن المصفوفة S غير شاذة ومن ثم فإن معكوسها S^{-1} موجود .

العوامل :

$$\alpha_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&2\\1&0\end{vmatrix}=-2\ ,\quad \alpha_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}4&0\\1&0\end{vmatrix}=0\ ,\quad \alpha_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4&0\\3&2\end{vmatrix}=8$$

$$\alpha_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}=0\ ,\quad \alpha_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}5&0\\0&0\end{vmatrix}=0\ ,\quad \alpha_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}5&0\\0&2\end{vmatrix}=-10$$

$$\alpha_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0&3\\0&1\end{vmatrix}=0\ ,\quad \alpha_{3}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}5&4\\0&1\end{vmatrix}=-5\ ,\quad \alpha_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}5&4\\0&3\end{vmatrix}=15$$

وبالتالي يكون

$$S^{-1}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-2&0&8\\0&0&-10\\0&-5&15\end{bmatrix}$$

ومشكلة هذه الطريقة هي كثرة عدد المحددات المطلوب حسابها وهي (n^2+1) من المحـــددات في المصفوفة المربعة من الرتبة $n\times n$. فمثلاً في المصفوفة $A_{4\times 4}$ نحتاج لحساب عدداً قدره 16 من المحددات الفرعية من الرتبة 3×3 إلى جانب محدد رباعي .

ب ـــ طريقة الإرتكاز *Pivoting Technique*

في هذه الطريقة تُمد المصفوفة A بمصفوفة الوحدة I على الصورة $[A \mid I]$ ثم يتم الحصول على المصفوفة المكافئة للمصفوفة $[A \mid I]$ على الصورة $[I \mid B]$ فتكون المصفوفة B هي معكـــوس المصفوفة A (أي تكون $B=A^{-1}$) .

مثال : أوجد معكوس المصفوفة S السابقة باستخدام طريقة الإرتكاز .

<u>**الحل :**</u>

$$[S \mid I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

* بأخذ الصف الأول من المصفوفة $[S \mid I]$ **كصف إرتكاز** ***Pivoting Row*** والعنصر الأول من هذا الصف **كعنصر إرتكاز** ***Pivoting Element*** ، وبقسمة صف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز نحصل على :

$$[S \mid I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}\underline{\underline{5}} & 4 & 0 & 1 & 0 & 0\\0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}\underline{\underline{1}} & 4/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0\\0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

* ثم بأخذ الصف الثاني من المصفوفة الناتجة كصف إرتكاز والعنصر الثاني منه كعنصر إرتكاز وقسمة صف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز نحصل على :

$$[S \mid I]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0\\0 & \underline{\underline{3}} & 2 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0\\0 & \underline{\underline{1}} & 2/3 & 0 & 1/3 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

* وبضرب صف الإرتكاز الثاني في (-1) وإضافته للصف الثالث وكذلك بضرب صف الإرتكاز الثاني في $(-4/5)$ وإضافته للصف الأول نحصل على :

$$[S \mid I]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 4/5 & 0 & 1/5 & 0 & 0\\0 & \underline{\underline{1}} & 2/3 & 0 & 1/3 & 0\\0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -8/15 & 1/5 & -4/15 & 0\\0 & \underline{\underline{1}} & 2/3 & 0 & 1/3 & 0\\0 & 0 & -2/3 & 0 & -1/3 & 1\end{array}\right]$$

* ثم بأخذ الصف الثالث من المصفوفة الناتجة كصف إرتكاز والعنصر الثالث منه كعنصر إرتكاز وقسمة صف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز نحصل على :

$$[S \mid I]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -8/15 & 1/5 & -4/15 & 0\\0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0\\0 & 0 & \underline{\underline{-2/3}} & 0 & -1/3 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -8/15 & 1/5 & -4/15 & 0\\0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0\\0 & 0 & \underline{\underline{1}} & 0 & 1/2 & -3/2\end{array}\right]$$

* وبضرب صف الإرتكاز الثالث في $(8/15)$ وإضافته للصف الأول وكذلك بضرب صف الإرتكاز الثالث في $(-2/3)$ وإضافته للصف الثالث نحصل على :

$$[S \mid I] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -8/15 & 1/5 & -4/15 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -3/2 \end{array}\right] = [I \mid S^{-1}]$$

وبالتالي تكون

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن :

(i) طريقة الإرتكاز تعتمد على إختيار صف للإرتكاز يُعتمد عليه لتغيير العناصر التي أعلى أسفل عنصر الإرتكاز لتكون أصفاراً .

(ii) عدد عناصر الإرتكاز يساوي عدد صفوف الإرتكاز وكل منهما يساوي n (رتبة المصفوفة) .

(iii) عمود وصف الإرتكاز القديم (أو القدامى) لا يُختار منه عناصر الإرتكاز الجديدة بل يُحذفون عند الإختيار الجديد .

(iv) يُستحسن أن تكون عناصر الإرتكاز هابطة على القطر الرئيسي كما هو مبين بالمثال السابق .

جـ - طريقة التجزئ ***Partititioning***

في هذه الطريقة يتم تجزئ المصفوفة A_n إلى $\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$. فإذا افترضنا أن $A^{-1} = B = \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right]$ ، فإن المصفوفات الفرعية A_{ij}, B_{ij} يجب أن تحقق التالي :

$$AB = I_n \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & I_m \end{array}\right]$$

حيث يُراعى التجزئ المناسب لعمليات الضرب وأن $r + m = n$. وتؤدي المعادلة الأخيرة إلى أربع معادلات هي :

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_r \quad , \quad A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = O$$
$$A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} = O \quad , \quad A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} = I_m$$

وبحل المعادلات الأربع المصفوفية (مع مراعاة إتجاه الضرب) للأربع مجاهيل (المصفوفات) $\{B_{ij}\}$ يمكننا الحصول على المعكوس B . وتُستخدم هذه الطريقة لبعض الصور الخاصة للمصفوفات ذات الأبعاد الكبيرة مع الاستعانة بالنتائج التالية

$$\text{(i)}\quad \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline O & B \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & O \\ \hline O & B^{-1} \end{array}\right]$$

$$\text{(ii)}\quad \left[\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O & B \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & D \\ \hline O & B^{-1} \end{array}\right]$$

حيث

$$AD + CB^{-1} = O \quad \Rightarrow \quad AD = -CB^{-1} \quad \Rightarrow \quad D = -A^{-1}CB^{-1}$$

$$\text{(iii)}\qquad \left[\begin{array}{c|c} A & O \\ \hline C & B \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & O \\ \hline E & B^{-1} \end{array}\right]$$

حيث

$$CA^{-1} + BE = O \quad \Rightarrow \quad BE = -CA^{-1} \quad \Rightarrow \quad E = -B^{-1}CA^{-1}$$

مثال : حل المثال السابق باستخدام طريقة التجزئ

الحل :

$$S^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} 5 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} 1/5 & D \\ \hline 0 & \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \end{array}\right]$$

حيث

$$D = -\frac{1}{5}[4 \quad 0]\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5}[4 \quad 0]\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{10}[0 \quad -8] = [0 \quad -\tfrac{4}{5}]$$

وهذا يعطي نفس النتيجة السابقة مع استعمال القاعدة الخاصة بالمصفوفة الثنائية فقط :

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \theta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_{2\times 2}^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} \theta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

بشرط أن

$$|A| = \alpha\theta - \gamma\beta \neq 0$$

ملاحظات :

(i) إذا كانت $A = [a_{ii}]$ مصفوفة قطرية فإن $A^{-1} = \left[\frac{1}{a_{ii}}\right]$ قطرية أيضاً بشرط أن $a_{ii} \neq 0$ لجميع قيم i .

(ii) إذا كانت A مصفوفة مثلثية عليا (سفلية) فإن A^{-1} تكون أيضاً مثلثية عليا (سفلية) .

(iii) إذا كانت A مصفوفة متماثلة ، فإن A^{-1} تكون أيضاً متماثلة .

(iv) إذا كانت A مصفوفة وحدوية *Unitary* (أي أن $A^{*T}A = I$) فإن $A^{-1} = A^{*T}$.

٢-١-٣-٢ معكوس المصفوفة المستطيلة (المعكوس الأيمن والمعكوس الأيسر

Right and Left Inverses

إذا ما كانت A مصفوفة مستطيلة رتبتها $m \times n$ فإن A_R (رتبتها $n \times m$ وبحيث $AA_R = I_m$) تُسمى المعكوس الأيمن للمصفوفة *Right Inverse of A* . كذلك المصفوفة A_L (رتبتها $n \times m$ وبحيث $A_L A = I_n$) تُسمى المعكوس الأيسر للمصفوفة *Left Inverse of A* . فعلى سبيل المثال لتكن

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ودعنا نفترض أن

$$A_L = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{bmatrix}$$

إذن نصل إلى الآتي :

$$A_L A = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \beta_1 & \alpha_1 + 2\beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 - \beta_2 & \alpha_2 + 2\beta_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 - \beta_3 & \alpha_3 + 2\beta_3 & \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نصل إلى تسع معادلات في ست مجاهيل :

$$\alpha_1 - \beta_1 = 1 \qquad \alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \qquad \beta_1 = 0$$

$$\alpha_2 - \beta_2 = 0 \quad , \quad \alpha_2 + 2\beta_2 = 1 \quad , \quad \beta_2 = 0$$
$$\alpha_3 - \beta_3 = 0 \quad , \quad \alpha_3 + 2\beta_3 = 0 \quad , \quad \beta_3 = 1$$

وهذه المعادلات ليس لها حل (على سبيل المثال نجد أن $\beta_1 = 0 \Leftarrow \alpha_1 = 0, \alpha_1 = 1$) وبالتالي فإن المعكوس الأيسر غير موجود .

كذلك دعنا نفترض أن

$$A_R = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \\ \nu_1 & \nu_2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$AA_R = \begin{bmatrix} \lambda_1 + \mu_1 & \lambda_2 + \mu_2 \\ -\lambda_1 + 2\mu_2 + \nu_1 & -\lambda_2 + 2\mu_2 + \nu_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي تؤدي إلى أربع معادلات في ست مجاهيل :

$$\lambda_1 + \mu_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 + \mu_2 = 0 \quad , \quad -\lambda_1 + 2\mu_1 + \nu_1 = 0 \quad , \quad -\lambda_2 + 2\mu_2 + \nu_2 = 1$$

لذلك فهناك عدد لانهائي من الحلول . ويمكن توضيح ذلك كالآتي : بحذف λ_1, λ_2 من المعادلات السابقة نصل إلى :

$$3\mu_1 + \nu_1 = 1 \quad , \quad 3\mu_2 + \nu_2 = 1$$

وبوضع قيم اختيارية لمجهولين من المجاهيل الأربعة $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$ (مثلاً دع $\mu_1 = \mu_2 = 0$) نحصل على المجهولين الآخرين ($\nu_1 = \nu_2 = 1$) ثم نعود لنحسب المجاهيل λ_1, λ_2 ($\lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 0$) وبالتالي نحصل على أحد الحلول للمصفوفة A_R :

$$A_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

وبالمثل يمكن الحصول على حل ثاني وثالث ورابع .. وهكذا بأخذ قيم إختيارية مختلفة . مثلاً :

$$\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow \nu_1 = \nu_2 = -2 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1 \Rightarrow A_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$$

ويتضح من هذا المثال وغيره الآتي :

(i) قد يكون للمصفوفة $A_{m\times n}$ معكوس أيسر وليس لها معكوس أيمن أو العكس .

(ii) المعكوس ذاته (سواء A_R أو A_L) قد يكون غير موجود وقد يكون (إن وُجِد) غير فريد .

(iii)

نظرية :

إذا كانت $A_{m\times n}$ لها معكوس أيسر A_L ومعكوس أيمن A_R في نفس الوقت ، فإنهما يجب أن يكونا متساويين *Identical* وفريدين *Unique* .

الإثبات :

من التعريف

$$A_L A = I_n \qquad (1)$$

$$A A_R = I_m \qquad (2)$$

وبضرب (1) من اليمين في A_R فإن

$$A_L \underline{A A_R} = I_n A_R = A_R$$

وباستخدام (2)

$$A_L I_m = A_R$$

أي أن

$$A_L = A_R$$

وهذا يُثبت التطابق . والآن افترض أن A لها معكوسان A_{L1}, A_{L2} من اليسار . إذن من الجزء السابق نجد أن :

$$A_{L1} = A_R$$

وكذلك :

$$A_{L2} = A_R$$

وهذا يعني أن :

$$A_{L1} = A_{L2}$$

أي أن المعكوس الأيسر (إن وُجِد) فهو فريد . وبالمثل بالنسبة للمعكوس الأيمن .

ملاحظة : هذه النظرية تؤدي إلى أنه إما أن يكون للمصفوفة $A_{m\times n}$ معكوس أيسر A_L فقط أو معكوس أيمن A_R فقط . وفي حالة وجود أيهما فإنه يكون غير فريد . وفي حالة وجودهما معاً فإنهما يكونا فريدين ويكون $A_L = A_R$.

فمثلاً :

★ المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ليس لها معكوس أيمن ولها عدد لانهائي من المعكوسات اليسري مثل $\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$.

★ المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ لها معكوس أيمن $A_R=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (وهو فريد) ومعكوس أيسر $A_L=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (وهو أيضاً فريد) وواضح أن $A_L = A_R$.

(iv) قد لا يكون للمصفوفة A معكوس أيمن أو معكوس أيسر وخاصةً إذا ما كانت المصفوفة مربعة وشاذة . فمثلاً إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ (واضح أنها مربعة وشاذة) وافترضنا أن $A_L=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_3 & \alpha_4\end{bmatrix}$ فإننا نحصل على :

$$\alpha_1+\alpha_2=0 \quad , \quad \alpha_1+\alpha_2=1 \quad , \quad \alpha_3+\alpha_4=0 \quad , \quad \alpha_3+\alpha_4=1$$

وهذا بالطبع مستحيل . كذلك إذا افترضنا أن $A_R=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2\\ \beta_3 & \beta_4\end{bmatrix}$ فإننا نحصل على :

$$\beta_1+\beta_2=0 \quad , \quad \beta_1+\beta_2=1 \quad , \quad \beta_3+\beta_4=0 \quad , \quad \beta_3+\beta_4=1$$

وهذا أيضاً مستحيل . وبالتالي فإن المصفوفة A ليس لها معكوس أيمن أو أيسر .

ويمكننا تلخيص النتائج السابقة كالآتي :

* إذا كانت $A_{m\times n}$ مصفوفة مستطيلة ($m\neq n$) فإن لها إما معكوس أيمن أو معكوس أيسر وليس الإثنين معاً
* إذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة غير شاذة فإن معكوسها الأيمن ومعكوسها الأيسر يكون متساويين ويكون للمصفوفة معكوس فريد A^{-1} . أما إذا كانت $A_{n\times n}$ مصفوفة مربعة شاذة فإنه لا يُوجد لها معكوس أيمن أو أيسر على الإطلاق .

٢-٢ حل المعادلات الخطية (عدد المعادلات = عدد المجاهيل) :

SOLUTION OF LINEAR SYSTEM OF EQUATIONS (m = n) :

تُعتبر المعادلات الخطية في الصورة

$$Ax=b$$

من المشاكل الرياضية الهامة في الرياضيات التطبيقية والبحتة على السواء ، حيث يُمثل

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

عمود المجاهيل وتُمثل A مصفوفة المعاملات ، في حين يُمثل المتجه b متجه الثوابت . وسوف نقدم في هذا الجزء تحليلاً تفصيلياً يتناسب مع أهميتها على مستوى الطرق المباشرة *Direct Methods* وكذلك على مستوى الطرق غير المباشرة *Indirect Methods* .

٢-٢-١ حل المعادلات الخطية المتجانسة

System of Linear Homogeneous Equations

في حالة ما إذا كانت $b=0$ (أي في الحالة $Ax=0$) تُسمى المعادلات بالمعادلات الخطية المتجانسة . وهذه الحالة لها حالتان فرعيتان ، هما :

أ ـ إذا كانت A غير شاذة :

(أي A^{-1} موجودة ، أو بتعبير آخـــر $|A| \neq 0$ أو $\rho(A) = n$) . في هذه الحالة لا يُوجد للمسألة إلا الحل الصفري (الذي يُسمى الحـــل التافه *Trivial Solution*) :

$$\boxed{x = 0}$$

ب ـ إذا كانت A شاذة :

(أي A^{-1} غير موجودة ، أو بتعبير آخـــر $|A| = 0$ أو $\rho(A) < n$) . في هذه الحالة يُوجد للمسألة عدد لانهائي من الحلول على النحـــو التالي :

$$x = c_1 \begin{bmatrix} Q_1 \\ \hline -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} Q_2 \\ \hline 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} Q_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots\cdots + c_{n-\rho} \begin{bmatrix} Q_{n-\rho} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

حيث $c_1 \;\; c_2 , c_3 \;\; , \cdots\cdots , c_{n-\rho}$ ثوابت .

ولإثبات ذلك دع $\rho(A) = \rho$ ، فهذا يعني أن :

$$A \sim \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} I_\rho & Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{n-\rho} \\ \hline O & O & O & O & O \end{array}\right]$$

وهذا بدوره يؤدي إلى أن

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c} I_\rho & Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{n-\rho} \\ \hline O & O & O & O & O \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\rho \\ \hline x_{\rho+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = O$$

أي أن

$$I_\rho \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\rho \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 & \cdots & Q_{n-\rho} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{\rho+1} \\ x_{\rho+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = O$$

وهي (ρ) من المعادلات المستقلة في (n) من المجاهيل . وبفرض أن

$$\begin{bmatrix} x_{\rho+1} \\ x_{\rho+2} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ \vdots \\ -c_{n-\rho} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

فإننا نصل إلى

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\rho \end{bmatrix} = \left[Q_1 \mid Q_2 \mid \cdots \mid Q_{n-\rho} \right] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-\rho} \end{bmatrix} = \left[c_1Q_1 \mid c_2Q_2 \mid \cdots \mid c_{n-\rho}Q_{n-\rho} \right] \qquad (2)$$

وبإضافة (1) إلى (2) فإننا نصل إلى

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\rho \\ \hline x_{\rho+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} Q_1 \\ \hline -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} Q_2 \\ \hline 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} Q_3 \\ \hline 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} Q_4 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots\cdots + c_{n-\rho} \begin{bmatrix} Q_{n-\rho} \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix}$$

مثال : حل المعادلات $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

الحل :

نستطيع إثبات أن $\rho(A) = 2$ وبالتالي فإن A شاذة ومنها

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & -4 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 3/4 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{c|c} I_\rho & Q_1 \\ \hline O & O \end{array}\right]$$

وبالتالي

$$I_\rho = I_2 \quad , \quad Q_1 = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

أي أن

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

٢-٢-٢ حل المعادلات الخطية غير المتجانسة

System of Linear Non-homogeneous Equations

في حالة ما إذا كانت $b \neq 0$ نصل إلى ما يُسمى بالمعادلات الخطية غير المتجانسة $Ax = b$.
وهناك ثلاث حالات سنتعرض لها هي :

٢-٢-٢-١ الحالة الأولى : $\rho(A) = \rho[A \mid b] = n$ ، حيث $[A \mid b]$ تُسمى المصفوفة المُوسّعة *Extended or Augmented Matrix* . في هذه الحالة تكون A غير شاذة وبالتالي فإن المعكوس A^{-1} يكون موجوداً ويمكن الحل إما بطريقة المعكوس (أي $x = A^{-1}b$) أو **بطريقة الحذف** ***Elimination Method*** أو بطريقة **التقسيم إلى مصفوفات مثلثية علوية وسفلية** ***L-U Factorization*** أو غيرها من **الطرق المباشرة** ***Direct Methods*** . وفي جميع الحالات سوف نحصل على حل وحيد *Unique Solution* .

أ ـــ طريقة المعكوس *Inverse Method* :

في هذه الطريقة نحسب معكوس المصفوفة A^{-1} بأي طريقة من الطرق السابق وصفها في الفصل السابق ثم نحصل على الحل على الصورة $x = A^{-1}b$.

مثال : حل المعادلات

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

الحل :

$$A=\left[\begin{array}{cc:cc}1&2&1&0\\3&4&0&1\\\hdashline 0&0&5&1\\0&0&1&2\end{array}\right]\Rightarrow A^{-1}=\left[\begin{array}{c:c}\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&-2\\-3&1\end{bmatrix}&D\\\hdashline O&\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2&-1\\-1&5\end{bmatrix}\end{array}\right]$$

حيث

$$D=-\begin{bmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/9&-1/9\\-1/9&5/9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5/9&-7/9\\-7/18&4/9\end{bmatrix}$$

(أنظر طريقة التجزئ في ٢-١-٣-١) وبالتالي يكون الحل هو :

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\underbrace{\left[\begin{array}{cc:cc}-2&1&5/9&-7/9\\3/2&-1/2&-7/18&4/9\\\hdashline 0&0&2/9&-1/9\\0&0&-1/9&5/9\end{array}\right]}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\0\\3\end{bmatrix}}_{b}=\begin{bmatrix}-7/3\\11/6\\-1/3\\5/3\end{bmatrix}$$

ب ــ طريقة الحذف *Elimination Method* :

في هذه الطريقة تُمَد مصفوفة المعاملات A بالمتجه b لتكوين المصفوفة المُوسّعة $[A \mid b]$ ثم نُجري بعض عمليات الصف البسيط للحصول على مصفوفة مكافئة يمكن من خلالها حل المعادلات بسهولة أكثر .

مثال : حل المعادلات

$$x-y+z=5$$
$$x+2y+2z=10$$
$$3x+z=1$$

الحل :

إذا رمزنا للصف رقم i بالرمز r_i وبإعادة كتابة المعادلات كما هو مبين بـــالجدول التـــالي ، نحصل على :

x	y	z		
$\underline{\underline{1}}$	-1	1	5	
1	2	2	10	
3	0	1	1	
1	-1	1	5	
0	$\underline{\underline{3}}$	1	5	$\to r_2 - r_1$
0	3	-2	-14	$\to r_3 - 3r_1$
1	-1	1	5	
0	3	1	5	
0	0	-3	-19	$\to r_3 - r_2$

ونظام المعادلات الأخير أكثر سهولة في الحل حيث يُعطي الآتي :

$$-3z = -19 \quad \Rightarrow \quad z = 19/3$$
$$3y + z = 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{3}\left(5 - \frac{19}{3}\right) = -4/9$$
$$x - y + z = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 5 - \frac{4}{9} - \frac{19}{3} = 16/9$$

ويكون الحل هو

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16/9 \\ -4/9 \\ 19/3 \end{pmatrix}$$

وننبه أنه في طريقة الحذف يتم الحذف والتبسيط ليس على برنامج محدد بل على حسب ظروف المسألة .. وهناك بالطبع سياسات وخطط في هذا الباب سنأخذها في فصلٍ مستقلٍ قادمٍ مثل **طريقة جاوس *Gauss Method*** و**طريقة جاوس ـــ جوردان *Gauss - Gaurdan Method*** وغيرها .

جـ - طريقة التقسيم $L\text{-}U$: *L-U Factorization* :

في هذه الطريقة يتم تقسيم مصفوفة المعاملات A إلى حاصل ضرب مصفوفتين إحداهما مثلثية عليا U والأخرى مثلثية سفلى L ؛ أي نحاول وضع A على الصورة :

$$A = LU$$

وبالتالي تأخذ المعادلات الشكل :

$$Ax = LUx = b$$

وبوضع $Ux = y$

نحصل على $Ly = b$

وبحل المعادلات $Ly = b$ بطريقة التقدم *Forward Method* يمكن الحصول على المتجـــه y ..
ثم بحل المعادلات $Ux = y$ بطريقة الرجوع *Backward Method* يمكننا الحصول على متجـــه المجاهيل x .

أما عن الطريقة التي يمكننا بها تقسيم مصفوفة المعـــاملات A إلى المصفوفتـــين U , L فهنـــاك طـــــــــرق كثيرة .. والطريقة العامة هي :

* تقسيم المصفوفة إلى

$$A = [a_{ij}] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U}$$

وبالتالي يكون

$$\left.\begin{aligned} u_{11} &= a_{11} \\ u_{12} &= a_{12} \\ u_{13} &= a_{13} \\ &\vdots \\ u_{1n} &= a_{1n} \end{aligned}\right\rangle \rightarrow \text{الصف الأول}$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{l_{21}}u_{11} &= a_{21} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \\ \underline{l_{31}}u_{11} &= a_{31} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \\ &\vdots \\ \underline{l_{n1}}u_{11} &= a_{n1} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}} = \frac{a_{n1}}{a_{11}} \end{aligned}\right\rangle \rightarrow \text{العمود الأول}$$

بشرط أن $u_{11} = a_{11} \neq 0$.

★ ثم نحسب بقية العناصر في الصف الثاني والعمود الثاني :

$$\left.\begin{array}{l} l_{21}u_{12}+\underline{u_{22}}=a_{22}\Rightarrow u_{22}=a_{22}-l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13}+\underline{u_{23}}=a_{23}\Rightarrow u_{23}=a_{23}-l_{21}u_{13} \\ \vdots \\ l_{21}u_{1n}+\underline{u_{2n}}=a_{2n}\Rightarrow u_{2n}=a_{2n}-l_{21}u_{1n} \end{array}\right\rangle \rightarrow$$

بقية عناصر الصف الثاني

أي أن

$$\boxed{u_{2n}=a_{2n}-l_{21}u_{1n} \quad , \quad n\geq 2}$$

$$\left.\begin{array}{l} l_{31}u_{12}+\underline{l_{32}}u_{22}=a_{32}\Rightarrow l_{32}=\dfrac{(a_{32}-l_{31}u_{12})}{u_{22}} \\ l_{41}u_{12}+\underline{l_{42}}u_{22}=a_{42}\Rightarrow l_{42}=\dfrac{(a_{42}-l_{41}u_{12})}{u_{22}} \\ \vdots \\ l_{n1}u_{12}+\underline{l_{n2}}u_{22}=a_{n2}\Rightarrow l_{n2}=\dfrac{(a_{n2}-l_{31}u_{12})}{u_{22}} \end{array}\right\rangle \rightarrow$$

بقية عناصر العمود الثاني

أي أن

$$\boxed{l_{n2}=\frac{(a_{n2}-l_{n1}u_{12})}{u_{22}} \quad , \quad n>2 \quad , \quad u_{22}\neq 0}$$

★ ثم نحسب بقية العناصر في الصف الثالث والعمود الثالث :

$$\left.\begin{array}{lll} l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}+\underline{u_{33}}=a_{33} & \Rightarrow & u_{33}=a_{33}-(l_{31}u_{13}+l_{32}u_{23}) \\ l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}+\underline{u_{34}}=a_{34} & \Rightarrow & u_{34}=a_{34}-(l_{31}u_{14}+l_{32}u_{24}) \\ \vdots & & \\ l_{31}u_{1n}+l_{32}u_{2n}+\underline{u_{3n}}=a_{3n} & \Rightarrow & u_{3n}=a_{3n}-(l_{31}u_{1n}+l_{32}u_{2n}) \end{array}\right\rangle \rightarrow$$

(بقية عناصر الصف الثالث)

أي أن

$$\boxed{u_{3n}=a_{3n}-(l_{31}u_{1n}+l_{32}u_{2n}) \quad , \quad n\geq 3}$$

$$\left.\begin{array}{lll} l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23} + \underline{l_{43}}u_{33} = a_{43} & \Rightarrow & l_{43} = \dfrac{[a_{43} - (l_{41}u_{13} + l_{42}u_{23})]}{u_{33}} \\ l_{51}u_{13} + l_{52}u_{23} + \underline{l_{53}}u_{33} = a_{53} & \Rightarrow & l_{53} = \dfrac{[a_{53} - (l_{51}u_{1n} + l_{52}u_{2n})]}{u_{33}} \\ \vdots & & \\ l_{n1}u_{13} + l_{n2}u_{23} + \underline{l_{n3}}u_{33} = a_{n3} & \Rightarrow & l_{n3} = \dfrac{[a_{n3} - (l_{n1}u_{13} + l_{n2}u_{23})]}{u_{33}} \end{array}\right\rangle \rightarrow$$

(بقية العمود الثالث)

أي أن

$$\boxed{l_{n3} = \frac{[a_{n3} - (l_{n1}u_{13} + l_{n2}u_{23})]}{u_{33}} \quad , \quad n > 3 \quad , \quad u_{33} \neq 0}$$

★ ثم نحسب بقية العناصر في الصف الرابع والعمود الرابع:

بقية عناصر الصف الرابع :

$$l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34} + \underline{u_{44}} = a_{44} \Rightarrow u_{44} = a_{44} - (l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}u_{34})$$

$$l_{41}u_{15} + l_{42}u_{25} + l_{43}u_{35} + \underline{u_{45}} = a_{45} \Rightarrow u_{45} = a_{45} - (l_{41}u_{15} + l_{42}u_{25} + l_{43}u_{35})$$

$$\vdots$$

$$l_{41}u_{1n} + l_{42}u_{2n} + l_{43}u_{3n} + \underline{u_{4n}} = a_{4n} \Rightarrow u_{4n} = a_{4n} - (l_{41}u_{1n} + l_{42}u_{2n} + l_{43}u_{3n})$$

أي أن

$$\boxed{u_{4n} = a_{4n} - (l_{41}u_{1n} + l_{42}u_{2n} + l_{43}u_{3n}) \quad , \quad n \geq 4}$$

بقية عناصر العمود الرابع :

$$l_{51}u_{14} + l_{52}u_{24} + l_{53}u_{34} + \underline{l_{54}}u_{44} = a_{54} \quad \Rightarrow \quad l_{54} = \frac{[a_{54} - (l_{51}u_{14} + l_{52}u_{24} + l_{53}u_{34})]}{u_{44}}$$

$$l_{61}u_{14} + l_{62}u_{24} + l_{63}u_{34} + \underline{l_{64}}u_{44} = a_{64} \quad \Rightarrow \quad l_{64} = \frac{[a_{64} - (l_{61}u_{14} + l_{62}u_{24} + l_{63}u_{34})]}{u_{44}}$$

$$\vdots$$

$$l_{n1}u_{14} + l_{n2}u_{24} + l_{n3}u_{34} + \underline{l_{n4}}u_{44} = a_{n4} \quad \Rightarrow \quad l_{n4} = \frac{[a_{n4} - (l_{n1}u_{14} + l_{n2}u_{24} + l_{n3}u_{34})]}{u_{44}}$$

أي أن

$$\boxed{l_{n4} = \frac{[a_{n4} - (l_{n1}u_{14} + l_{n2}u_{24} + l_{n3}u_{34})]}{u_{44}} \quad , \quad n > 4 \quad , \quad u_{44} \neq 0}$$

وهكذا .. ويمكن تلخيص الخطوات السابقة كالآتي :

<u>الخطوة الأولي</u> : تُقسم مصفوفة المعاملات A إلى LU بحيث تكون L مصفوفة مثلثية سفلى عناصر قطرها الرئيسي الوحدة $(l_{ii} = 1, \forall i)$ والمصفوفة U مصفوفة مثلثية عليا .

<u>الخطوة الثانية</u> : نتبع خوارزمي الصف ثم العمود *Row - Column Algorithm* لإيجاد عناصر المصفوفتين L , U كالآتي :

- الصف والعمود الأول ←

$$u_{1n} = a_{1n} \quad , \quad n \geq 1$$

$$l_{n1} = \frac{a_{n1}}{a_{11}} \quad , \quad n > 1 \quad , \quad a_{11} \neq 0$$

- الصف والعمود الثاني ←

$$u_{2n} = a_{2n} - l_{21}u_{1n} \quad , \quad n \geq 2$$

$$l_{n2} = \frac{(a_{n2} - l_{n1}u_{12})}{u_{22}} \quad , \quad n > 2 \quad , \quad u_{22} \neq 0$$

- الصف والعمود الثالث ←

$$u_{3n} = a_{3n} - (l_{31}u_{1n} + l_{32}u_{2n}) \quad , \quad n \geq 3$$

$$l_{n3} = \frac{[a_{n3} - (l_{n1}u_{13} + l_{n2}u_{23})]}{u_{33}} \quad , \quad n > 3 \quad , \quad u_{33} \neq 0$$

- الصف والعمودالرابع ←

$$u_{4n} = a_{4n} - (l_{41}u_{1n} + l_{42}u_{2n} + l_{43}u_{3n}) \quad , \quad n \geq 4$$

$$l_{n4} = \frac{[a_{n4} - (l_{n1}u_{1n} + l_{n2}u_{2n} + l_{n3}u_{3n})]}{u_{44}} \quad , \quad n > 4 \quad , \quad u_{44} \neq 0$$

- الصف والعمود رقم k ←

$$u_{kn} = a_{kn} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}u_{jn} \quad , \quad n \geq k > 1$$

$$l_{nk} = \frac{\left[a_{nk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{nj}u_{jk}\right]}{u_{kk}} \quad , \quad n > k > 1 \quad , \quad u_{kk} \neq 0$$

مثال : حل (باستخدام أسلوب LU) المعادلات

$$\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

الحل :

أولاً : التقسيم الضربي $A = LU$:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\\2 & 3 & 4\end{bmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\l_{21} & 1 & 0\\l_{31} & l_{32} & 1\end{bmatrix}}_{L}\underbrace{\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12} & u_{13}\\0 & u_{22} & u_{23}\\0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}}_{U}$$

- الصف الأول في U :

$$u_{1n}=a_{1n} \quad , \quad n\geq 1 \quad \Rightarrow \quad U=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\0 & u_{22} & u_{23}\\0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

- العمود الأول في L :

$$l_{n1}=\frac{a_{n1}}{a_{11}} \quad , \quad n>1 \quad , \quad a_{11}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\1 & l_{32} & 1\end{bmatrix}$$

- الصف الثاني في U :

$$u_{2n}=a_{2n}-l_{21}u_{1n} \quad , \quad n\geq 2 \quad \Rightarrow \quad U=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\0 & 2 & -1/2\\0 & 0 & u_{33}\end{bmatrix}$$

- العمود الثاني في L :

$$l_{n2}=\frac{(a_{n2}-l_{n1}u_{12})}{u_{22}} \quad , \quad n>2 \quad , \quad u_{22}\neq 0 \quad \Rightarrow \quad L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/2 & 1 & 0\\1 & 3/2 & 1\end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون المصفوفة L قد تم تحديدها بالكامل .

• الصف الثالث في U :

$$u_{3n} = a_{3n} - \left(l_{31}u_{1n} + l_{32}u_{2n}\right) \quad , \quad n \geq 3 \quad \Rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون التقسيم النهائي هو :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{bmatrix}}_{U}$$

ثانياً : حل المعادلات :

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad L\underbrace{Ux}_{=y} = b \quad \Rightarrow \quad Ly = b$$

أي أن

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 1 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{b} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ \frac{1}{2}y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = -\frac{1}{2} \\ y_1 + \frac{3}{2}y_2 + y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -\frac{1}{4} \end{array} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

وبعد معرفة المتجه y يمكن معرفة المتجه x من حل المعادلات $Ux = y$ كالآتي :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 15/4 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \\ -1/4 \end{bmatrix}}_{y} \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \frac{15}{4}x_3 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{15} \\ 2x_2 - \frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{15} \\ 2x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{8}{15} \end{array} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad x = \begin{bmatrix} 8/15 \\ -4/15 \\ -1/15 \end{bmatrix}$$

مثال : قسم المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ إلى LU .

الحل :

• الصف الأول في U :

$$u_{1n}=a_{1n}, n\ge 1 \Rightarrow U=\begin{bmatrix}2&0&0&3\\0&u_{22}&u_{23}&u_{24}\\0&0&u_{33}&u_{34}\\0&0&0&u_{44}\end{bmatrix}$$

• العمود الأول في L :

$$l_{n1}=\frac{a_{n1}}{a_{11}} \quad , \quad n>1 \quad , \quad a_{11}\ne 0 \quad \Rightarrow \quad L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0&0\\0&l_{32}&1&0\\ \frac{1}{2}&l_{42}&l_{43}&1\end{bmatrix}$$

• الصف الثاني في U :

$$u_{2n}=a_{2n}-l_{21}u_{1n} \quad n\ge 2 \quad \Rightarrow \quad U=\begin{bmatrix}2&0&0&3\\0&2&3&\frac{5}{2}\\0&0&u_{33}&u_{34}\\0&0&0&u_{44}\end{bmatrix}$$

• العمود الثاني في L :

$$l_{n2}=\frac{(a_{n2}-l_{n1}u_{12})}{u_{22}} \quad , \quad n>2 \quad , \quad u_{22}\ne 0 \quad \Rightarrow \quad L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0&0\\0&1&1&0\\ \frac{1}{2}&\frac{3}{2}&l_{43}&1\end{bmatrix}$$

• الصف الثالث في U :

$$u_{3n}=a_{3n}-(l_{31}u_{1n}+l_{32}u_{2n}) \quad , \quad n\ge 3 \quad \Rightarrow \quad U=\begin{bmatrix}2&0&0&3\\0&2&3&\frac{5}{2}\\0&0&-6&-\frac{3}{2}\\0&0&0&u_{44}\end{bmatrix}$$

• العمود الثالث في L :

$$l_{n3}=\frac{[a_{n3}-(l_{31}u_{1n}+l_{32}u_{2n})]}{u_{33}} \quad , \quad n>3 \quad , \quad u_{33}\ne 0 \quad \Rightarrow \quad L=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \frac{1}{2}&1&0&0\\0&1&1&0\\ \frac{1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{3}{4}&1\end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون المصفوفة L قد تم تحديدها بالكامل .

• **الصف الرابع في U :**

$$u_{4n} = a_{4n} - \left(l_{31}u_{1n} + l_{32}u_{2n} + l_{43}u_{3n}\right) \quad , \quad n \geq 4 \quad \Rightarrow \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5/2 \\ 0 & 0 & -6 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -33/8 \end{bmatrix}$$ وبالتا

وبالتلي يكون التقسيم النهائي هو :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 3/4 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5/2 \\ 0 & 0 & -6 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & -33/8 \end{bmatrix}}_{U}$$

د ـ طريقة كرامر *Cramer's Method* :

وهذه الطريقة تعتمد على المحددات وليس المصفوفات وفيها يكون

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|} \quad , \quad i = 1,2,\cdots\cdots n$$

حيث $|A|$ هو محدد مصفوفة المعاملات A و $|A_i|$ هو المحدد الناتج من $|A|$ بعد استبدال العمود رقم i فيه بعمود الثوابت b .

مثال : باستخدام طريقة كرامر حل مجموعة المعادلات :

$$x - y + z - 3 = 0$$
$$2y + 3z - 5 = 0$$
$$x - 4z - 16 = 0$$

الحل :

مجموعة المعادلات السابقة يمكن وضعها في الصورة

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 16 \end{bmatrix}}_{b}$$

ومن ثم نحصل على

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-13 \qquad |A_1|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 5 & 2 & 3\\ 16 & 0 & 4\end{vmatrix}=-124$$

$$|A_2|=\begin{vmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 3\\ 1 & 16 & -4\end{vmatrix}=-64 \qquad |A_3|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 5\\ 1 & 0 & 16\end{vmatrix}=21$$

وبالتالي يكون

$$\left| \begin{array}{l} x=\dfrac{|A_1|}{|A|}=\dfrac{-124}{-13}=\dfrac{124}{13}\\ y=\dfrac{|A_2|}{|A|}=\dfrac{-64}{-13}=\dfrac{64}{13}\\ z=\dfrac{|A_3|}{|A|}=\dfrac{21}{-13}=-\dfrac{21}{13}\end{array}\right\rangle \longrightarrow \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}124\\ 64\\ -21\end{pmatrix}$$

٢-٢-٢-٢ الحالة الثانية : $\rho(A)=\rho(A \mid b)<n$

في هذه الحالة يكون المعكوس A^{-1} غير موجود ومن ثم لا يوجد حل متفرد *Unique Solution* ويصبح هناك عدد لانهائي من الحلول على النحو التالي : .

$$x=\begin{bmatrix}s\\ \hline 0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}Q_1\\ \hline -1\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}Q_2\\ \hline 0\\ -1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}+\cdots\cdots+c_{n-\rho}\begin{bmatrix}Q_{n-\rho}\\ \hline 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ -1\end{bmatrix}$$

كم سبق في حالة المعادلات المتجانسة مضافاً إليها المتجه $\begin{bmatrix}s\\ \hline 0\end{bmatrix}$ الناتج من تغير قيمة متجه الثوابت b .

مثال : حل مجموعة المعادلات

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 5\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$$

الحل :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&1&2\\1&1&1&5\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\0\end{bmatrix}}_{b}$$

$$[A \mid b]=\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&3&1\\0&1&1&2&1\\1&1&1&5&2\\1&-1&-1&1&0\end{array}\right]\sim\cdots\cdots\cdots\sim\left[\begin{array}{c|cc|c}I_2&0&3&1\\&1&2&1\\\hline O&0&0&0\\&0&0&0\end{array}\right]$$. (تأكد بنفسك)

وبالتالي

$$x=\begin{bmatrix}1\\1\\\hline 0\\0\end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix}0\\1\\\hline -1\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}3\\2\\\hline 0\\-1\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}1+3c_2\\1+c_1+2c_2\\-c_1\\-c_2\end{bmatrix}$$

حيث c_1,c_2 ثوابت عامة .

٢-٢-٢-٣ حالة $\rho(A)\neq\rho(A \mid b), \rho(A)<n$

في هذه الحالة تكون A مصفوفة شاذة وتكون المعادلات عندئذٍ غير متوائمة مع بعضها *Inconsistent Equations* .. وبالتالي لا يوجد حل في هذه الحالة .

مثال : حل المعادلات $\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&4\\1&1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$.

الحل :

باستخدام الحذف

$$[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\0&1&4&1\\1&1&7&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\0&1&4&1\\0&1&4&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&1\\0&1&4&1\\0&0&0&-1\end{array}\right]$$

أي أن

$$\rho(A)=2 \quad , \quad \rho(A|b)=3$$

وبالتالي لا يوجد حل لهذا النظام غير المتوائم حيث أن المعادلة الأخيرة في النظام المكافئ تؤدي إلى أن " 0 = 1- " وهي نتيجة لا يمكن قبولها مما يعني أن الحل غير موجود .

٢-٢-٣ استعمال ضرب كرونكر في حل بعض المعادلات

$$A_{n\times n}X_{n\times m}=C_{n\times m} \quad , \quad C=C_{n\times m}=[c_{ij}] \quad , \quad X=X_{n\times m}=[x_{ij}]$$

حيث $X=X_{n\times m}$ مصفوفة مجهولة . في حالة $\rho(A)=n$ فإن الحل يكون على الصورة $X=A^{-1}C$.
وعامةً فإنه يمكن تحويل المعادلات إلى الصورة العادية المتجهه *Vector Form* كالآتي :

أ ــ إذا كان $A_{n\times n}X_{n\times m}=C_{n\times m}$ ، فإن ذلك يُكافئ $(A\otimes I_m)x=c$ حيث

$$c=[c_{11} \quad c_{12} \quad \cdots \quad c_{1m} \quad c_{21} \quad c_{22} \quad \cdots \quad c_{2m} \quad \cdots\cdots\cdots \quad c_{n1} \quad c_{n2} \quad \cdots \quad c_{nm}]^T$$
$$x=[x_{11} \quad x_{12} \quad \cdots \quad x_{1m} \quad x_{21} \quad x_{22} \quad \cdots \quad x_{2m} \quad \cdots\cdots\cdots \quad x_{n1} \quad x_{n2} \quad \cdots \quad x_{nm}]^T$$

فمثلاً إذا كان

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}$$

وهذه هي

$$(A\otimes I_2)x=c$$

ب ــ إذا كان $X_{n\times m}B_{m\times m}=C_{n\times m}$ ، فإن ذلك يُكافئ $(I_n\otimes B^T)x=c$ حيث $c\,,x$ كما سبق في أ

جـ – والآن إذا كـــان $A_{n\times n}X_{n\times m}+X_{n\times m}B_{m\times m}=C_{n\times m}$ ، فـــإن ذلـــك يُكـــافئ $\left(A\otimes I_m+I_n\otimes B^T\right)x=c$ ، والأخيرة تُعبر عن (mn) من المعادلات . فمثلاً إذا كان

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&3\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}2&1\\1&4\end{bmatrix}\quad,\quad C=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

فإن المعادلة $AX_{2\times2}+XB_{2\times2}=I_2$ يمكن تحويلها إلى $\left(A\otimes I_2+I_2\otimes B^T\right)x=c$ كالآتي

$$\left(\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\0&0&3&0\\0&0&&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&4&0&0\\0&0&2&1\\0&0&1&4\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{21}\\x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{12}\\c_{21}\\c_{22}\end{bmatrix}$$

وبالتالي نصل إلى المعادلات

$$\begin{bmatrix}3&1&2&0\\1&5&0&2\\0&0&5&1\\0&0&1&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{22}\\x_{21}\\x_{42}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{12}\\c_{21}\\c_{22}\end{bmatrix}$$

والتي يمكن حلها بطريقة جاوس (مثلاً) .

ملحوظة : إذا وضعنا $D=\left(A\otimes I_m+I_n\otimes B^T\right)$ في الحالة (جـ) فإن حل المعـادلات $Dx=c$ يتبع التفرعات السابق شرحها في هذا الباب .

٢-٢-٤ طرق الحذف *Elimination Methods*

في هذا الفصل سوف نقوم باستعراض بعض طرق الحذف المشهورة وهي طرق مشهود لهـا بالكفاءة في حل المعادلات الخطية .

٢-٢-٤-١ طريقة جاوس *Gauss Method* :

في هذه الطريقة يتم إيجاد مكافئ للنظام $[A\mid b]$ بعمليات الصف البسيط للحصـول علـى $[U\mid\hat{b}]$ حيث U مصفوفة مثلثية عليا . ثم يتم الحصول على المجهول x_n يليه x_{n-1} ثـم x_{n-2} ... وهكذا ، وأخيراً x_1 وهو ما يُسمى **الحل بالرجوع** ***Solving Backward*** .

خطوات العمل :

* التأكد من أن $a_{11} \neq 0$ وأخذ الصف الأول من $[A \mid b]$ كصف إرتكاز *Pivot Row* (ويُسمى كذلك لأنه سيكون محور الارتكاز الذي نرتكز عليه لتغيير العناصر في العمود الأول إلى أصفار فيما عدا a_{11}) .
* التأكد من أن $\hat{a}_{22} \neq 0$ في المصفوفة المكافئة $[\hat{A} \mid c]$ ثم نأخذ الصف الثاني كصف ارتكاز والعنصر $\hat{a}_{22}$ كعنصر ارتكاز *Pivot Element* ثم جعل العناصر التي أسفله فقط أصفاراً (وذلك باستخدام صف الارتكاز فقط)
* تُكرر العملية السابقة n-1 من المرات في المصفوفة المربعة التي رتبتها $n \times n$ فنحصل على النظام المكافئ $[U \mid \hat{b}]$ والذي نحصل منه على نظام المعادلات الذي يمكن حله كما أسلفنا الذكر .

مثال : حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة جاوس :
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

الحل :

إذا رمزنا للصف رقم i بالرمز r_i ، إذن

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xrightarrow{-2r_1 + r_2} \\ \xrightarrow{r_3} \\ \xrightarrow{r_1 + r_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xrightarrow{r_2} \\ \xrightarrow{\frac{2}{3}r_2 + r_3} \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2 + r_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 5/3 & -1 \\ 0 & 0 & 10/3 & 4/3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xrightarrow{r_2} \\ \xrightarrow{r_3} \\ \xrightarrow{-5r_3 + r_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 5/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right] = [U \mid \hat{b}]$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} -7x_4 &= 7 & \Rightarrow \quad x_4 &= -1 \\ \tfrac{2}{3}x_3 + \tfrac{5}{3}x_4 &= -1 & \Rightarrow \quad x_3 &= 1 \\ -3x_2 + x_3 - 2x_4 &= -3 & \Rightarrow \quad x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 3 & \Rightarrow \quad x_1 &= 1 \end{aligned}$$

ويكون الحل هو

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ملحوظات :

* يمكنك الحصول على نظم مكافئة لجاوس وكلها تؤدي نفس الغرض . فمثلاً يمكن الحصول على نظام مكافئ $[L \mid \hat{b}]$ حيث L مصفوفة مثلثية سفلى ثم نوجد x_1 ثم x_2 ... وهكذا ، وأخيراً x_n . ويسمى الحل هنا بـ **الحل بالتقدم** ***Solving Forward*** . كذلك يمكن الحصول على نظام مكافئ فيه $\hat{a}_{ii} = 1$ وذلك بقسمة كل صف ارتكاز على عنصر الارتكاز وهي عمليات قسمة زائدة ولكنها تُسهل عمليات الحذف بعد ذلك .

* يمكن للقارئ (عند استخدامه لطريقة جاوس) التأكد من أن $|A| = \prod_{i=1}^{n} U_{ii}$ أو $|A| = \prod_{i=1}^{n} L_{ii}$ ، حيث $|A|$ هي قيمة محدد مصفوفة المعاملات A . فمثلاً في المثال السابق :

$$|A| = (1) \times (-3) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times (-7)$$

٢-٢-٤-٢ طريقة جاوس ـ جوردان *Gauss - Jordan Method* :

في هذه الطريقة نضيف على خطوات طريقة جاوس إضافة بسيطة وهي جعل العناصر فوق عنصر الارتكاز (كما في أسفله) أصفاراً وبذلك نحصل على النظام المكافئ $[D \mid \hat{b}]$ حيث D مصفوفة قطرية ، ثم نحصل على الحل بسهولة بعد ذلك .

مثال : حل المثال السابق باستخدام طريقة جاوس ــ جوردان .

الحل :

باتباع نفس الخطوات المتبعة في المثال السابق نحصل على

$$[A \mid b]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xrightarrow{-2r_1+r_2} \\ \xrightarrow{r_3} \\ \xrightarrow{r_1+r_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2+r_1} \\ \xrightarrow{r_2} \\ \xrightarrow{\frac{2}{3}r_2+r_3} \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2+r_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2/3 & 5/3 & -1 \\ 0 & 0 & 10/3 & 4/3 & 2 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2+r_1} \\ \xrightarrow{r_2} \\ \xrightarrow{\frac{2}{3}r_2+r_3} \\ \xrightarrow{\frac{1}{3}r_2+r_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -9/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 2/3 & 5/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c} \xrightarrow{-\frac{3}{7}r_4+r_1} \\ \xrightarrow{-\frac{9}{14}r_4+r_2} \\ \xrightarrow{\frac{5}{21}r_4+r_3} \\ \xrightarrow{r_4} \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right] = [D \mid \hat{b}]$$

ثم حل المعادلات الناتجة :

$$\begin{aligned} & x_1 = 1 \\ & -3x_2 = -6 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 \\ & \frac{3}{2}x_3 = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x_3 = 1 \\ & -7x_4 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_4 = -1 \end{aligned}$$

ويكون الحل هو

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

* نلاحظ أن الجهد الإضافي في جعل عناصر عمود الارتكاز (العمود المحتوي على عنصر الارتكاز) أصفاراً يقابله الحصول على معادلات سهلة الحل جداً (لا تحتاج تقدم أو رجوع) .

* إذا ما جعلنا عناصر الارتكاز مساوية للواحد الصحيح فإننا نحصل في هذه الحالة على النظام المكافئ $\left[I \mid \hat{b}\right]$ ويكون (في هذه الحالة) $x = \hat{b}$ مباشرةً .

* يمكن للقارئ (عند استخدامه لطريقة جاوس ـــ جوردان) التأكد من أن $|A| = \prod_{i=1}^{n} D_{ii}$ حيث $|A|$ هي قيمة محدد مصفوفة المعاملات A . فمثلاً في المثال السابق :

$$|A| = (1)\times(-3)\times\left(\frac{2}{3}\right)\times(-7)$$

٢-٢-٥ الطرق التكرارية (غير المباشرة) *Iterative (Indirect) Methods* لحل المعادلات $Ax = b$

تُسمى الطرق السابق شرحها في الفصول السابقة (طريقة المعكوس ، طريقة كرامر ، طريقة التقسيم إلى LU وطرق الحذف) بـ **الطرق المباشرة** ***Direct Methods*** وكلها تتفق في أننا نحصل على الحل بعد عدد محدود ومعلوم من الخطوات . ولكن هناك طرق أخرى لها فلسفة مختلفة في الحصول على الحل . تُسمى هذه الطرق بـ **الطرق غير المباشرة** ***Indirect Methods*** أو بـ **الطرق التكرارية** ***Iterative Methods*** . وبشكلٍ عام نقوم بعمل الآتي :

* نُقسم مصفوفة المعاملات A إلى المصفوفتين H, G بحيث تكون $A = H + G$ وتكون H^{-1} موجودة (أي أن H غير شاذة) . وبالتالي فإن نظام المعادلات $Ax = b$ يُصبح مكافئاً لـ

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad (H + G)x = b \quad \Rightarrow \quad Hx = b - GX$$

أو

$$\boxed{x = H^{-1}b - H^{-1}Gx}$$

* نقوم **بتخمين** ***guess*** حل $x^{(0)}$ ونعوض به في الطرف الأيمن للعلاقة السابقة فنحصل على حل أول $x^{(1)}$. ثم نقوم بالتعويض بهذا الحل الآخر $x^{(1)}$ في الطرف الأيمن للعلاقة السابقة فنحصل على حل ثاني $x^{(2)}$ . ... وهكذا . وبشكلٍ عام فإن العلاقة السابقة يمكن وضعها في صورة المعادلات التكرارية :

$$\boxed{x^{(k+1)} = H^{-1}b - H^{-1}Gx^{(k)}}$$

ويتقارب النظام إلى الحل الصحيح إذا ما وجدنا أن

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x$$

ويتباعد إذا أدى إلى خلاف ذلك .

ولكن ما هو شرط أن تكون المعادلات السابقة **تقاربية** ***Convergent*** إلى الحل الصحيح ؟ . للرد على هذا السؤال دع :

$$r = H^{-1}b \quad , \quad Q = -H^{-1}G$$

وبالتالي تأخذ المعادلات التكرارية الصورة :

$$x^{(k+1)} = r + Qx^{(k)}$$

فإذا ما عوضنا بـ $x^{(0)}$ ثم $x^{(1)}$ ثم $x^{(2)}$ .. وهكذا حتى نصل إلى $x^{(k)}$ سنجد أن :

$$x^{(k)} = \left(I_n + Q + Q^2 + \cdots\cdots + Q^{k-1}\right)r + Q^k x^{(0)}$$

(حيث $x^{(0)}$ هو **التخمين المبدئي** ***Initial (First) Guess*** ، k عدد الخطوات التكرارية) نستطيع إثبات أنه إذا ما وُجِد $(I_n - Q)^{-1}$ فإنه يمكننا استعمال الآتي :

$$I_n + Q + Q^2 + \cdots\cdots + Q^{k-1} = (I_n - Q)^{-1}\left(I_n - Q^k\right)$$

ولإثبات ذلك فإننا نقوم بضرب الطرفين في $(I_n - Q)$ وبالتعويض في صيغة الحل التكراري نحصل على :

$$x^{(k)} = (I_n - Q)^{-1}\left(I_n - Q^k\right)r + Q^k x^{(0)}$$

وكحالة مثالية فإننا نريد أن يكون تقارب الحل مستقلاً تماماً عن اختيارنا لـ $x^{(0)}$. فإذا ما أخذنا النهاية عندما k تؤول إلى مالانهاية ، فإننا نريد أن يكون

$$\lim_{k\to\infty} Q^k = O_n$$

حيث O_n هي المصفوفة الصفرية . فإذا ما كان هذا متوافراً فإننا نجد أن

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x^{(k)} &= (I_n - Q)^{-1}(I_n - O_n)r + O_n x^{(0)} \\ &= (I_n - Q)^{-1} r \\ &= \left(I_n + H^{-1}G\right)^{-1} \times \left(H^{-1}b\right) \\ &= \left[\left(I_n + H^{-1}G\right)^{-1} H^{-1}\right] \times b \\ &= \left[H\left(I_n + H^{-1}G\right)\right]^{-1} b \\ &= (H+G)^{-1} b \\ &= A^{-1}b = x\end{aligned}$$

وبذلك نجد أن

شرط تقارب التكرار

$$\boxed{x = r + Qx^{(k)}}$$

حيث

$$\boxed{A = H + G \quad , \quad Q = H^{-1}G \quad , \quad r = H^{-1}b}$$

(باعتبار أن H^{-1} موجودة) هو

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} Q^k = O_n}$$

أو

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} \left[H^{-1}G\right]^k = O_n}$$

وهو ما يُسمى شرط التقارب .

برهان جانبي :

يمكن إثبات أن $(I_n - Q)^{-1}$ موجود على النحو التالي :

$$I_n - Q = I_n + H^{-1}G = H^{-1}H + H^{-1}G = H^{-1}(H+G) = H^{-1}A$$

وبالتالي فإن :

$$|I_n - Q| = |H^{-1}||A|$$

وحيث أننا مفترضين أن H^{-1} موجود (أي $|H^{-1}| \neq 0$) وكذلك مفترضين أن $|A| \neq 0$ (باعتبار أننا نبحث عن حل وحيد غير الحل التافه للنظام $Ax = b$) ، إذن فإن $|I_n - Q| \neq 0$ ومنهـــا نســتنج أن $(I_n - Q)^{-1}$ موجودة .

ملحوظة هامة :

شرط التقارب $\left(\lim_{k\to\infty}[H^{-1}G]^k = O_n\right)$ الذي حصلنا عليه يكافئ الشرط التالي :

$$\max_{i=1,2,\cdots,n}\left\{\sum_{j=1}^{n}|q_{ij}|\right\} < 1$$

أي أن مجموع القيم العددية لعناصر كل صف في Q يجب أن يكون أقل من الواحد الصحيح . وهذا شرط عام للتقارب مع ملاحظة أن $Q = H^{-1}G$ وأن $A = H + G$ وكذلك H^{-1} موجـــودة . ويمكن للقـــارئ مـــراجعة (*Steinberg* , 1974) .

٢-٢-٥-١ طريقة جاكوبي *Jacobi Method* :

في هذه الطريقة تُقسم المصفوفة A كالآتي :

$$A = G + H$$

بحيث

$$\left(H = [h_{ij}] \;,\; h_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ a_{ii} & i = j \end{cases}\right) \quad و \quad \left(G = [g_{ij}] \;,\; g_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}\right)$$

ولابد أن يتحقق شرط مبدئي وهو أن $\boxed{a_{ii} \neq 0 \;,\; \forall i}$

مثال : باستخدام طريقة جاكوبي أوجد حل تقريبي لنظام المعادلات $\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

الحل :

$$A=\begin{bmatrix}5&1&2\\0&6&4\\1&2&5\end{bmatrix}\quad,\quad b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

إذن

$$A=\begin{bmatrix}5&1&2\\0&6&4\\1&2&5\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}5&0&0\\0&6&0\\0&0&5\end{bmatrix}}_{=H}+\underbrace{\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&4\\1&2&0\end{bmatrix}}_{=G}$$

ومنها يمكن استنتاج أن

$$H^{-1}=\begin{bmatrix}1/5&0&0\\0&1/6&0\\0&0&1/5\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad r=H^{-1}b=\begin{bmatrix}1/5&0&0\\0&1/6&0\\0&0&1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5\\1/6\\1/5\end{bmatrix}$$

$$Q=-H^{-1}G=\begin{bmatrix}1/5&0&0\\0&1/6&0\\0&0&1/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&4\\1&2&0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0&1/5&2/5\\0&0&2/3\\1/5&2/5&0\end{bmatrix}$$

وبالتالي تأخذ المعادلات التكرارية $x^{(k+1)}=r+Qx^{(k)}$ الصورة :

$$\begin{bmatrix}x_1^{(k+1)}\\x_2^{(k+1)}\\x_3^{(k+1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/5\\1/6\\1/5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1/5&2/5\\0&0&2/3\\1/5&2/5&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\x_2^{(k)}\\x_3^{(k)}\end{bmatrix}$$

أي أن

$$\boxed{\begin{aligned}x_1^{(k+1)}&=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}x_2^{(k)}+\frac{2}{5}x_3^{(k)}\right)\\x_2^{(k+1)}&=\frac{1}{6}-\left(\frac{2}{3}x_3^{(k)}\right)\\x_3^{(k+1)}&=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{5}x_1^{(k)}+\frac{2}{5}x_2^{(k)}\right)\end{aligned}}\qquad (1)$$

والعلاقات (1) يمكن الوصول لها ببساطة أكثر وذلك بحل المعادلات :

$$\sum_{l=1}^{n}a_{kl}\,x_l=b\quad,\quad k=1,2,\cdots\cdots,n$$

في x_k على النحو التالي :

$$x_k = \frac{1}{a_{kk}}\left\{b_k - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^{n} a_{kl}\, x_l\right\} \quad , \quad a_{kk} \neq 0 \qquad (2)$$

وسواء استُخدِمت العلاقات (1) أو (2) فإن الحل لعدة خطوات تكرارية يبينه الجدول التـــالي حيـــث تُمثل n عدد التكرارت :

n	x_1	x_2	x_3	ملاحظات
0	0.0000	0.0000	0.0000	$\leftarrow \quad x^{(0)}$
1	0.2000	0.1667	0.2000	$\leftarrow \quad x^{(1)}$
2	0.0867	0.0334	0.0933	$\leftarrow \quad x^{(2)}$
3	0.1560	0.1045	0.1693	$\leftarrow \quad x^{(3)}$
4	0.1114	0.0538	0.1270	$\leftarrow \quad x^{(4)}$
5	0.1384	0.0820	0.1562	$\leftarrow \quad x^{(5)}$
6	0.1211	0.0626	0.1395	$\leftarrow \quad x^{(6)}$
7	0.1317	0.0737	0.1507	$\leftarrow \quad x^{(7)}$
8	$0.\underline{12}50$	0.0662	$0.\underline{14}42$	$\leftarrow \quad x^{(8)}$
9	$0.\underline{12}91$	$0.\underline{0}706$	$0.\underline{14}85$	$\leftarrow \quad x^{(9)}$
10	$0.\underline{12}65$	$0.\underline{0}677$	$0.\underline{14}59$	$\leftarrow \quad x^{(10)}$
11	$0.\underline{12}81$	$0.\underline{06}94$	$0.\underline{14}76$	$\leftarrow \quad x^{(11)}$

ونلاحظ أن

$$\left|x_3^{(11)} - x_3^{(10)}\right| = 0.17 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-2}$$

$$\left|x_2^{(11)} - x_2^{(10)}\right| = 0.17 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-2}$$

$$\left|x_1^{(11)} - x_1^{(10)}\right| = 0.16 \times 10^{-2} < 0.5 \times 10^{-2}$$

وبالتالي فإن الحل لمنزلتين عشريتين هو

$$x = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.06 \\ 0.14 \end{bmatrix}$$

وذلك بعد ١١ خطوة تكرارية . ولتحسين الحل (تحسين عدد المنازل العشرية) نزيد عدد الخطـــوات التكرارية ، وعلى القارئ أن يكرر المسألة وذلك بأخذ

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \text{أو} \quad x^{(0)}=\begin{bmatrix}0.08\\0.03\\0.09\end{bmatrix}$$

وعليه أن يُلاحظ أننا دائماً نصل إلى الحل (هناك تقارب دائماً) بغض النظر عن $x^{(0)}$ (لمـــاذا ؟ - راجع شرط التقارب) علماً بأن الحل الدقيق (لأربعة منازل عشرية) هو

$$x=\begin{bmatrix}0.1273\\0.0686\\0.1471\end{bmatrix}$$

ويمكن للقارئ مطالعة شفرة خوارزمي جاكوبي بلغة *BASIC* في الملحق أ (*Appendix A*) .

تقارب طريقة جاكوبي :

علمنا أن

$$H=\left[h_{ij}\right] \quad , \quad h_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ a_{ii} & i=j\end{cases}$$

واشترطنا أن

$$a_{ii}\neq 0 \quad , \quad \forall i$$

وبالتالي فإن

$$H^{-1}=\left[b_{ij}\right] \quad , \quad b_{ij}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ \dfrac{1}{a_{ii}} & i=j\end{cases}$$

كذلك علمنا أن

$$G=\left[g_{ij}\right] \quad , \quad g_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\ a_{ij} & i\neq j\end{cases}$$

وبالتالي تكون

$$H^{-1}G = C = [c_{ij}] \quad , \quad c_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ b_{ii} g_{ij} & i \neq j \end{cases}$$

ومع إجراء شرط التقارب على المصفوفة $Q = -H^{-1}G$ فإن

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| \right\} < 1$$

وباجراء هذا الشرط على طريقة جاكوبي فإننا نصل إلى الآتي :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1$$

وهذا معناه أن

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \quad , \quad \forall i$$

وهذا بدوره يعني أن القيمة العددية لعنصر القطر في كل صف من مصفوفة المعاملات A يجب أن يكون أكبر من مجموع القيم العددية لبقية عناصر الصف المحتوي على هذا العنصر القطري .

تعريف :

المصفوفة $A = [a_{ij}]$ التي تحقق $\left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \, , \forall i \right)$ **تُسمى بالمصفوفة مهيمنة القطر *Diagonally Dominant* وهي مصفوفة غير شاذة (أنظر الباب الأول) .**

من التعريف السابق يمكن القول بأن شرط تقارب طريقة جاكوبي لحل نظام المعادلات $Ax = b$ هو أن تكون مصفوفة المعاملات A مهيمنة القطر بغض النظر عن قيمة التخمين الإبتدائي $x^{(0)}$ الذي نبدأ به الحل .

ملحوظة هامة :

يجب إعداد المصفوفة A (عند استخدام طريقة جاكوبي) بحيث تكون مهيمنة القطر (وذلك بتغيير ترتيب المعادلات) ، فإن أمكن ذلك ضمنا التقارب وإن لم يمكن ذلك فنحاول أن تكون قريبة ما أمكن من هيمنة القطر . أما إذا لم تكن المصفوفة A مهيمنة القطر فقد يحدث تقارب وقد لا يحدث ، مثال لذلك نظام المعادلات

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & \underline{47} \\ \underline{56} & 23 & 11 \\ 17 & \underline{65} & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

الذي لا نضمن تقارب حله بطريقة جاكوبي وهي على النسق السابق .. لكن مع تبديل المعادلات وكتابتها على الصورة

$$\begin{bmatrix} \underline{56} & 23 & 11 \\ 17 & \underline{65} & -13 \\ 3 & -5 & \underline{47} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

يمكن ضمان تقارب الحل بطريقة جاكوبي وذلك لأي $x^{(0)}$.

٢-٢-٥-٢ طريقة جاوس ــ سيدل *Gauss Seidel Method* :

في هذه الطريقة يتم تقسيم مصفوفة المعاملات A إلى مصفوفتين مثلثتين ؛ سفلى H وعليا G حيث :

$$A = H + G \longrightarrow \begin{cases} H = [h_{ij}] \ , \quad h_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ a_{ij} & i \geq j \end{cases} \\ G = [g_{ij}] \ , \quad g_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & i < j \\ 0 & i \geq j \end{cases} \end{cases}$$

ونحصل على المعادلات الآتية :

$$x_i^{(k+1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{11}} b_1 - \dfrac{1}{a_{11}} \sum\limits_{j=2}^{n} a_{1j} x_j^{(k)} & , \quad i = 1 \\ \dfrac{1}{a_{ii}} b_i - \dfrac{1}{a_{ii}} \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \dfrac{1}{a_{ii}} \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} & , \quad i = 2,3,\cdots\cdots,n-1 \\ \dfrac{1}{a_{nn}} b_n - \dfrac{1}{a_{nn}} \sum\limits_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)} & , \quad i = n \end{cases}$$

ونلاحظ أنه لحساب الحل في الخطوة رقم $k + 1$ للمجهول x_j (أي $x_j^{(k+1)}$) فإننا نستعين بقيم المجاهيل $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots\ldots\ldots, x_{j-1}^{(k+1)}$, المحسوبة في الخطوة $k + 1$ مع قيم المجاهيل $x_{j+1}^{(k)}, x_{j+2}^{(k)}, \ldots\ldots\ldots, x_n^{(k)}$, المحسوبة في الخطوة السابقة k . أي أن القيم الجديدة تدخل في الحسابات بمجرد تحديدها على خلاف ما يتم في طريقة جاكوبي .

ومن الأفضل أن نوجد المعادلات التكرارية من المعادلات نفسها كما يبينه المثال التالي .

مثال : باستخدام طريقة جاوس ـــ سيدل ، حل المعادلات $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

الحل :

المعادلات السابقة يمكن كتابتها على الصورة

$$5x_1 + 2x_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{5}(7 - 2x_2)$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{-1}{4}(-2 - x_1 - x_3)$$

$$x_2 + 2x_3 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2}(3 - 2x_2)$$

وبالتالي تصبح المعادلات التكرارية هي :

$$x_1^{(k+1)} = \tfrac{1}{5}\left(7 - 2x_2^{(k)}\right)$$
$$x_2^{(k+1)} = -\tfrac{1}{4}\left(-2 - x_1^{(k+1)} - x_3^{(k)}\right)$$
$$x_3^{(k+1)} = \tfrac{1}{2}\left(3 - 2x_2^{(k+1)}\right)$$

وبأخذ

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

فإننا نصل إلي :

n	x_1	x_2	x_3	ملاحظات
0	1.2000	0.8000	1.2000	$\leftarrow \quad x^{(0)}$
1	1.0800	1.0700	0.9650	$\leftarrow \quad x^{(1)}$
2	0.9720	0.9843	1.0079	$\leftarrow \quad x^{(2)}$
3	1.0063	1.0036	0.9982	$\leftarrow \quad x^{(3)}$
4	0.9986	0.9992	1.0004	$\leftarrow \quad x^{(4)}$
5	1.0003	1.0002	0.9999	$\leftarrow \quad x^{(5)}$
6	0.9999	1.0000	1.0000	$\leftarrow \quad x^{(6)}$
7	1.0000	1.0000	1.0000	$\leftarrow \quad x^{(7)}$

وهذا يُعطي

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

* كون المصفوفة مهيمنة القطر أم لا .. لا يؤثر على تقارب طريقة جاوس ـــ سيدل ، إذ يجب دراسة تقارب طريقة جاوس ـــ سيدل دراسة مستقلة عن طريقة جاكوبي .

والشرط العام هو

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \left| q_{ij} \right| < 1 \quad , \quad \forall i}$$

حيث

$$Q = -H^{-1} G$$

أي أنه إذا كان $\sum_{j=1}^{n} |q_{ij}| < 1$ لجميع الصفوف في Q ، فإن طريقة جاوس — سيدل تتقارب . أما إذا لم يتحقق الشرط السابق فقد تتقارب الطريقة وقد لا تتقارب .. أي أن الشرط السابق **شرط كافي ولكنه ليس ضرورياً** ***Sufficient but not Necessary*** .

* هناك شرط آخر للتقارب مكافئ للشرط السابق وهو أيضاً ينطبق على الطرق التكرارية بشكلٍ عام .. وهو أن

$$\boxed{|\lambda_{\max}| < 1}$$

حيث $\lambda_{\max}$ تُسمى بـ **القيمة الذاتية** ***eigenvalue*** الأكبر عددياً لـ $Q = -H^{-1}G$. وحسابات القيم الذاتية سوف نتناولها بشيءٍ من التفصيل في الباب القادم . هذا يعني أن المصفوفة Q لها قيم ذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ بحيث تكون هذه القيم **متميزة** ***Distinct*** .. أي $(\lambda_i \neq \lambda j \,, \forall i \neq j)$. فإذا تحقق الشرط السابق (أي $|\lambda_{\max}| < 1$) حينئذٍ تكون الطريقة التكرارية متقاربة ، أما غير ذلك فلا نعلم (*Steinberg* , 1974) .

٢-٢-٥-٣ طرق التراخي *Relaxation Methods* :

دعنا الآن نُسرِّع من طريقة جاوس — سيدل السابقة ونبدأ ذلك بتعريف **المتجه الباقي** ***Residual Vector r*** .

$$r = b - A\tilde{x} \qquad (1)$$

حيث $\tilde{x} \in R^n$ هو الحل التقريبي . فقد علمنا أن الحل التقريبي للعنصر (المجهول) $x_i^{(k)}$ للمتجه $x^{(k)}$ في الخطوة k يعطى بـ

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \qquad (2)$$

وباستعمال المعادلة (1) للعنصر الذي رتبته m في المتجه المتبقي $r_i^{(k)}$ (وسنرمز له بالرمز $r_{mi}^{(k)}$) فإن

$$r_{mi}^{(k)} = b_m - \sum_{j=1}^{i-1} a_{mj} x_j^{(k)} - \sum_{j=i}^{n} a_{mj} x_j^{(k-1)}$$

فإذا كانت $m = i$ (أي أننا نحسب للعنصر المتبقي i في المتجه المتبقي $r_i^{(k)}$) :

$$r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} - a_{ii}x_i^{(k-1)}$$

أي أن

$$a_{ii}x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} \qquad (3)$$

وبالربط بين المعادلتين (3) , (2) نجد أن

$$a_{ii}x_i^{(k-1)} + r_{ii}^{(k)} = a_{ii}x_i^{(k)}$$

أي أن

$$\boxed{x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + \frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}} \qquad (4)$$

ويمكننا استنتاج علاقة أخرى عند استعمال العنصر $(i+1)$ بدلاً من العنصر i .. وعندئذٍ سنصل إلى :

$$r_{i(i+1)}^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}$$

$$= b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - a_{ii}x_i^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} = a_{ii}x_i^{(k)} - a_{ii}x_i^{(k)} = 0$$

أي أن العنصر الذي رتبته i في $r_{i+1}^{(k)}$ يجب أن يكون صفراً وهذه خاصية من خواص طريقة جاوس ـــ سيدل ولكن ليست هذه هي الكفاءة المطلوبة للطريقة .. إذ أن المطلوب هو أن تتحول كل العناصر إلى أصفار (أي يصبح $r = 0$) وهي حالة مثالية . لكن واقعياً نحاول دائماً أن نقلل من قيمة مقياس $r_{i+1}^{(k)}$. ولعمل ذلك فإننا نضع **وزن موجب** ***Positive Wight w*** في المعادلة (4) السابقة كالآتي :

$$x_i^{(k)} = x_i^{(k-1)} + w\frac{r_{ii}^{(k)}}{a_{ii}} \qquad (5)$$

حيث $w > 0$. فإذا أخذنا $0 < w < 1$ ، فإن الطريقة تُسمى طريقة **استرخائية تحتية** ***Under Relaxation*** . وتُعطي هذه الطريقة تقارب لبعض النظم ولكنها ليست متقاربة في طريقة جاوس ـــ سيدل . أما إذا اخترنا $w > 1$ ، فإن الطريقة تُسمى طريقة **استرخائية فوقية** ***Over Relaxation*** وهي تُستعمل لإسراع التقارب للنظم المتقاربة أصلاً في طريقة جاوس ـــ سيدل . ويُرمز لهذه الطريقة بالشفرة ***SOR*** (*Successive Over Relaxation*) .

والآن باستعمال المعادلة (3) ، فإننا نصل إلى الآتي :

$$\frac{wr_{ii}^{(k)}}{a_{ii}}=\frac{wb_i}{a_{ii}}-\frac{w}{a_{ii}}\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\frac{w}{a_{ii}}\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k-1)}-wx_i^{(k-1)}$$

وباستعمال المعادلة (5) نصل إلى الآتي :

$$\boxed{x_i^{(k)}=(1-w)x_i^{(k-1)}+\frac{w}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k-1)}\right)} \qquad (6)$$

تمرين :

على القارئ أن يُثبت من الصيغة السابقة (6) الصورة المصفوفية :

$$x^{(k)}=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]x^{(k-1)}+w(D-wL)^{-1}b$$

(حيث $D=[a_{ii}]$ مصفوفة قطرية ، L مصفوفة مثلثية سفلى ، U مصفوفة مثلثية عليا) في الصـــور التالية :

$$D=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix},\quad L=\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ -a_{ij}&\cdots&0\end{bmatrix},\quad U=\begin{bmatrix}0&\cdots&-a_{ij}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&0\end{bmatrix}$$

وذلك بضرب (6) في a_{ii} ثم تحويل التجميع الموجود إلى مصفوفات .

ولتوضيح الخوارزمي السابق لنفرض أننا لدينا النظم

$$\begin{aligned}4x_1+3x_2&=24\\ 3x_1+4x_2-x_3&=30\\ -x_2+4x_3&=-24\end{aligned}$$

الذي له الحل $x=\begin{bmatrix}3\\4\\-5\end{bmatrix}$ بالطرق المباشرة . وبطريقة جاوس ـــ سيدل $(w=1)$:

$$\begin{aligned}x_1^{(k)}&=-0.75x_2^{(k-1)}+6\\ x_2^{(k)}&=-0.75x_1^{(k)}+0.25x_3^{(k-1)}+7.5\\ x_3^{(k)}&=0.25x_2^{(k)}-6\end{aligned}$$

وبالتالي نحصل على الجدول التالي :

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	ملاحظات
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	$\leftarrow \quad x^{(0)}$
1	5.2500000	3.8125000	-5.0468750	$\leftarrow \quad x^{(1)}$
2	3.1406250	3.8828125	-5.0292969	$\leftarrow \quad x^{(2)}$
3	3.0878906	3.9267578	-5.0183405	$\leftarrow \quad x^{(3)}$
4	3.0549316	3.9542236	-5.0114441	$\leftarrow \quad x^{(4)}$
5	3.0343323	3.9713898	-5.0071526	$\leftarrow \quad x^{(5)}$
6	3.0214577	3.9821186	-5.0044703	$\leftarrow \quad x^{(6)}$
7	3.0134110	3.9888241	-5.0027940	$\leftarrow \quad x^{(7)}$

وواضح أن الطريقة متقاربة . ويمكن إسراع الطريقة باستعمال $w=1.25$. في هذه الحالة تصبح المعادلات التكرارية

$$x_1^{(k)} = -0.25x_1^{(k-1)} - 0.9375x_2^{(k-1)} + 7.5$$
$$x_2^{(k)} = -0.9375x_1^{(k)} - 0.25x_2^{(k-1)} + 0.3125x_3^{(k-1)} + 9.375$$
$$x_3^{(k)} = 0.3125x_2^{(k)} - 0.25x_3^{(k-1)} - 7.5$$

والجدول التالي يوضح التقارب :

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	ملاحظات
0	1.0000000	1.0000000	1.0000000	$\leftarrow \quad x^{(0)}$
1	6.3125000	3.5195313	-6.6501465	$\leftarrow \quad x^{(1)}$
2	2.6223145	3.9585266	-4.6004238	$\leftarrow \quad x^{(2)}$
3	3.1333027	4.0102646	-5.0966863	$\leftarrow \quad x^{(3)}$
4	2.9570512	4.0074838	-4.9734897	$\leftarrow \quad x^{(4)}$
5	3.0037211	4.0029250	-5.0057135	$\leftarrow \quad x^{(5)}$
6	2.9963276	4.0009262	-4.9982822	$\leftarrow \quad x^{(6)}$
7	3.0000498	4.0002586	-5.0003486	$\leftarrow \quad x^{(7)}$

ومن الملاحظ أن هناك تسريع للتقارب قد حدث . ولكن لابد من الإجابة على سؤالٍ لابد وقد لمع في ذهن القارئ .. ألا وهو " **على أي أساس نختار قيمة w ؟** " . على أي حال ، لاتوجد إجابة شافية لكل النظم .. ولكن أستعير هنا ما كتبه (*Burden & Faires* , 1993) في كتابه الممتع عن التحليـــل العددي :

نظرية لــــ *Kahan* :

إذا كان (في مصفوفـــة المعـــاملات A) $a_{ii} \neq 0 \quad , \quad \forall i$ وكـــان $T_w = (D - wL)^{-1}[(1-w)D + wU]$ هي المصفوفة التكرارية للطرق *SOR* ، فإن $\tilde{\rho}(T_w) \geq |w-1|$ (حيث $\tilde{\rho}(T_w)$ هو نصـــف القطـــر الطيفي *Spectral Radius* للمصفوفة T_w) ويكون $\tilde{\rho}(T_w) < 1$ إذا ما كان $0 < w < 2$.

ملحوظة : يُعرف نصف القطر الطيفي ***Spectral Radius*** لمصفوفة A (ويُرمز له بـــالرمز $\tilde{\rho}(A)$) كالآتي :

$$\tilde{\rho}(A) = \max|\lambda|$$

حيث λ تُعبر عن القيم الذاتية للمصفوفة A (أنظر الباب الثالث) .

نظرية لــــ *Ostrowski - Reich* :

إذا كانت مصفوفة المعاملات A موجبة تحديـــداً *Positive Definite* وكان $0 < w < 2$ فإن طرق *SOR* تتقارب دائماً لأي قيمة إبتدائية $x^{(0)}$.

حيث A تُعتبر موجبة تحديداً ***Positive Definite*** وذلك إذا كان

$$x^{*T} Ax > 0 \quad , \quad \forall x \neq O$$

(أنظر الباب الخامس ـــ التطبيق السادس) .

نظرية هامة :

إذا كانت مصفوفة المعاملات A موجبة تحديـــداً Positive Definite وكانت ثلاثية القطر Tridiagonal وكان :

$$T_j = D^{-1}(L+U),\ T_g = (DL)^{-1}U$$

فإن $\tilde{\rho}(T_g) = [\tilde{\rho}(T_j)]^2 < 1$ **ويكون أمثل اختيار لــــ w في طـــرق SOR هو :**

$$w = \frac{2}{1+\sqrt{1-\tilde{\rho}(T_g)}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\tilde{\rho}(T_j)]^2}} =$$

وفي هذه الحالة يكون $\tilde{\rho}(T_w) = w-1$

فمثلاً في المثال السابق كانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ وهي ثلاثية القطر وموجبة تحديداً (وعلى القارئ أن يُؤجل إثبات ذلك حتى يقرأ الباب الخامس). لذا فإن

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.75 & 0 \\ -0.75 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنها نحسب القيم الذاتية لــ T_j كالآتي

$$|T_j - \lambda I| = -\lambda(\lambda^2 - 0.625) \Rightarrow \tilde{\rho}(T_j) = \sqrt{0.625} = \max|\lambda|$$

$$\Rightarrow \quad w = \frac{2}{1+\sqrt{1-0.625}} \cong 1.24$$

وهذا ما يفسر استخدامنا لـــــ $w = 1.25$ في المثال الأخير . ويمكن للقارئ مطالعة شفرة خوارزمي SOR بلغة BASIC في الملحق أ (*Appendix A*) .

٢-٣ حل المعادلات الخطية $(m \neq n)$

كثير من المشاكل الرياضية تُنتج معادلات خطية لا يتساوى فيها عدد المجـــاهيل مـــع عـــدد المعادلات $(m \neq n)$. كيف نستطيع حل هذه المشاكل بما تقدم معرفته من الدرجة *Rank* وطـــرق الحذف *Elimination Methods* وتحليلنا للحالة التي فيها $n = m$ ؟ .

نظرية :

إذا ما كان $\boxed{Ax = b}$ نظماً من m من المعادلات الخطيـــة في n مـــن المجاهيل وكانت $\boxed{\rho(A) = \rho[A \mid b] = r}$ فإنه :

★ **إذا كان $\boxed{r = n}$ فإن النظم $\boxed{Ax = b}$ لـــه حـــل فريـــد *Unique Solution* .**

★ **إذا كان $\boxed{r < n}$ فإن النظم $\boxed{Ax = b}$ له عدد لانهائي من الحلول *Infinite Number of Solutions* .**

الإثبات :

من المعلوم أنه إذا كان $\rho(A) = \rho[A \mid b] = r$ فإن هـــذا معنـــاه أن المعـــادلات تكـــون **متوائمـــة** ***Consistent*** (وهذا معلوم من دراستنا للحالة $m = n$) وبالتالي فإن المصفوفة $[A \mid b]$ لها ما يكافئهـــا ولتكن $[\hat{A} \mid \hat{b}]$ حيث

$$\hat{A} = \left[\begin{array}{c|c} I_r & C_{r(n-r)} \\ \hline O_{(n-r)r} & O_{(n-r)(n-r)} \end{array}\right] \quad , \quad \hat{b} = \left[\begin{array}{c} f \\ \hline O \end{array}\right]$$

دع

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix}$$

وبالتجزئ

$$\hat{x}=\left[\begin{array}{c}\hat{\underline{x}}_r\\ \hline \hat{\underline{x}}_{n-r}\end{array}\right]$$

حيث

$$\hat{\underline{x}}_r=\begin{bmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\\ \vdots\\ \hat{x}_r\end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\underline{x}}_{n-r}=\begin{bmatrix}\hat{x}_{r+1}\\ \hat{x}_{r+2}\\ \vdots\\ \hat{x}_n\end{bmatrix},$$

وبالتالي فإن

$$\hat{A}\hat{x}=\left[\begin{array}{c|c}I_r & C\\ \hline O & O\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\hat{\underline{x}}_r\\ \hline \hat{\underline{x}}_{n-r}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}I_r\hat{\underline{x}}_r+C\hat{\underline{x}}_{n-r}\\ \hline O\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}f\\ \hline O\end{array}\right]$$

أي أن

$$\hat{\underline{x}}_r+C_r\hat{\underline{x}}_{n-r}=f$$

أو

$$\boxed{\hat{\underline{x}}_r=f-C_r\hat{\underline{x}}_{n-r}}$$

الحالة الأولى : $r=n$

في هذه الحالة لا وجود للمصفوفة C_r ومن ثم تكون

$$\hat{\underline{x}}_{n-r}=f$$

وهذا معناه أن هناك حل فريد للنظام $\hat{A}\hat{x}=\hat{b}$ (ومن ثم للنظام $Ax=b$) .

الحالة الثانية : $r<n$

دعنا نفترض أن العناصر $(n-r)$ الأخيرة من $\hat{x}$ (أي $\hat{\underline{x}}_{n-r}$) تأخذ الصورة الآتية :

$$\hat{x}_{r+j}=\alpha_j \quad , \quad j=1,2,\cdots\cdots,n-r$$

وبالتالي يكون

$$\hat{x}_i=f_i-\sum_{k=1}^{n-r}C_{r(r+k)}\alpha_k \quad , \quad ,i=1,2,\cdots\cdots,r$$

هي قيمة الـــ r عنصر الأولى من $\hat{x}$ (أي $\hat{\underline{x}}_r$) ، وبالتالي فإن هذا معناه أن لدينا مالانهاية من الحلول بسبب عدم محدودية قيمة العناصر $\{\alpha_j\}$ التي فرضناها .

مثال : حل المعادلات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}_{5\times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}_{5\times 1} .$$

الحل :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -8 \end{bmatrix}}_{A\ \ 5\times 4} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{x\ \ 4\times 1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}}_{b\ \ 5\times 1}$$

بطريقة الحذف نصل إلى (وضح كيف ؟) :

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -3 \\ 5 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 & -8 & 7 \end{array}\right] \sim \cdots\cdots\cdots \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

وبالتالي فإن

$$\rho(A) = \rho[A \mid b] = 2 < 4$$

وبالتالي لدينا عدد لانهائي من الحلول (كما سبق أن بينا) . مثلاً :

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

* هذا النظم من المعادلات معناه أن لدينا $(n-r)$ من المعادلات الزائدة عن الحاجة وأننا نحل عملياً r من المعادلات المستقلة فقط .

* في حالة $\rho(A) \neq \rho[A \mid b]$ ، فإن هذا معناه أن النظم من المعادلات يكون غـــير متوائـــم *Inconsistent* وبالتالي لا يكون هناك حل .
* في حالة $m \leq n$ فإن قرارتنا لا تختلف كثيراً عما سبق :

— فإذا كان $\rho(A) = \rho[A \mid b] = n$ فإن هذه هي حالة " الحل الفريد " .
— وإذا كان $\rho(A) = \rho[A \mid b] < n$ فإن هذه حالة " مالانهاية من الحلول " .
— وإذا كان $\rho(A) \neq \rho[A \mid b]$ فإن هذه حالة " لايوجد حل " .

والجدول التالي مُستعار من (*Steinberg*, 1974) وفيه ملخص ما سبق .

$Ax = b$: m من المعادلات في n من المجاهيل			
علاقة m بـ n	$\rho[A \mid b] = \rho$	$\rho(A) = r$	حل المعادلات $Ax = b$
$m < n$	$r \neq \rho$	$r < m < n$	لايوجد حل
	$r = \rho$	$r < m < n$	مالانهاية من الحلول
	$r = \rho$	$r = m$	مالانهاية من الحلول
$m = n$	$r \neq \rho$	$r < m$	لايوجد حل
	$r = \rho$	$r < m$	مالانهاية من الحلول
	$r = \rho$	$r = m = n$	حل وحيد
$m > n$	$r \neq \rho$	$r \leq n < m$	لايوجد حل
	$r = \rho$	$r < n < m$	مالانهاية من الحلول
	$r = \rho$	$r = n < m$	حل وحيد

٢-٣-١ الحل الأمثل في حالة $\rho(A) = n < m$

لنبدأ هذا الفصل بهذا **العارض** ***Lemma*** :

عارض ــ ١ : *Lemma* 1 :

إذا كانت $A_{m \times n}$ **بحيث** $\rho(A) = n < m$ **فإن** $\rho(A^T A) = n$.

من قوانين الدرجة في هذا الباب يمكن للقارئ محاولة إثبات هذا العارض .

والآن نستطيع إثبات عارض ـــ ٢

عارض ـــ ٢ : Lemma 2 :

إذا كانت $A_{m\times n}$ بحيث $\boxed{\rho(A) = n < m}$ فإن الحل الأمـــثل للمقياس ٢ (Norm - 2) للمعادلة $Ax = b$ هـــو $\boxed{x = (A^T A)^{-1} A^T b}$ حيـــث $\rho(A) \neq \rho[A \mid b]$.

الإثبات :

إذا كان $Ax = b$ فإن الخطأ يكون $\|Ax - b\|_2$ حيث المقياس ـــ ٢ المستخدم يعني أن الخطأ δ هو

$$\delta = \|Ax - b\|_2$$

ويكون

$$\begin{aligned}
\delta^2 &= (Ax - b)^T (Ax - b) \\
&= \left((Ax)^T - b^T\right)(Ax - b) \\
&= \left(x^T A^T - b^T\right)(Ax - b) \\
&= x^T A^T Ax - x^T A^T b - b^T Ax + b^T b \\
&= x^T A^T Ax - 2x^T A^T b + b^T b
\end{aligned}$$

وبجعل الخطأ أقل ما يمكن (أي $\frac{\partial\delta^2}{\partial x} = 0$) :

$$\frac{\partial\delta^2}{\partial x} = 2A^T Ax - 2A^T b + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A^T Ax = A^T b \quad \Rightarrow \quad x_{opt} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

حيث x_{opt} هي **الحل الأمثل Optimal Solution** . وهذا هو الحل لأقل خطـــأ لأن $\frac{\partial^2\delta^2}{\partial x^2} = 2AA^T$ والمصفوفة AA^T مصفوفة متماثلة وموجبة تحديداً (أي أن $x^{*T}(AA^T)x > 0$) وهذا يعـــني أن x_{opt} هي النهاية الصغرى .

مثال : أوجد حلاً تقريبياً للمعادلات $\begin{bmatrix}1&2&0\\1&2&-1\\0&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}$.

الحل :

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&2&0\\1&2&-1\\0&1&2\\1&2&3\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix}}_{b}$$

ليكن r_i هو الصف رقم i من أي مصفوفة ؛

$$[A \mid b]=\left[\begin{array}{ccc|c}\underline{\underline{1}}&2&0&1\\1&2&-1&-1\\0&1&2&0\\1&2&3&2\end{array}\right] \sim \begin{array}{c}\xrightarrow{r_1}\\\xrightarrow{-r_1+r_2}\\\xrightarrow{r_3}\\\xrightarrow{-r_1+r_3}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&0&-1&2\\0&1&2&0\\0&0&3&1\end{array}\right]$$

وبتبديل الصفين الثاني والثالث معاً :

$$[A \mid b]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&3&1\end{array}\right]$$

وبالاستمرار في عمليات الصف البسيط :

$$[A \mid b]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&1\\0&\underline{\underline{1}}&2&0\\0&0&1&2\\0&0&3&1\end{array}\right] \sim \begin{array}{c}\xrightarrow{-2r_2+r_1}\\\xrightarrow{r_2}\\\xrightarrow{r_3}\\\xrightarrow{r_4}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&1\\0&1&2&0\\0&0&\underline{\underline{1}}&2\\0&0&3&1\end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{c}\xrightarrow{2r_3+r_1}\\\xrightarrow{-2r_3+r_2}\\\xrightarrow{r_3}\\\xrightarrow{-3r_3+r_4}\end{array}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&5\\0&1&0&-4\\0&0&1&2\\0&0&0&-5\end{array}\right]$$

وبالتالي فإن

$$\rho(A)=3=n\neq\rho[A \mid b]$$

إذن لايوجد حل وحيد أو عدد لانهائي من الحلول . وللحصول على حل تقريبي باستخدام مقياس — ٢ ، فمن النتائج بعارض — ٢ :

$$A^T A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 6 & 11 & 6 \\ 2 & 6 & 14 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(A^T A\right)^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} -59 & 36 & -7 \\ 36 & -19 & 3 \\ -7 & 3 & 3/2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad x_{opt} = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \begin{bmatrix} 3.88 \\ 0.68 \\ 0.34 \end{bmatrix}$$

وهو أقل خطأ في مقياس — ٢ .

٢-٤ تمارين محلولة على الباب الثاني

(١) لأي قيمة لـ k لا يكون للنظم

$$\begin{aligned} 2x_1 + kx_2 + x_3 &= 0 \\ (k-1)x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \end{aligned}$$

الحل التافه . ثم أوجد حلاً لهذا النظم .

الحل :

هذا النظم المتجانس يمتنع عن الحل التافه عندما $|A| = 0$ ، أي عند :

$$\begin{vmatrix} 2 & k & 1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 1, k = \tfrac{9}{4}$$

* وعندما $k = 1$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \text{ (كيف ؟) }$$

وبالتالي :

$$x = c_1 \begin{bmatrix} 3/2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

★ وعندما $k=\frac{9}{4}$ وبنفس الأسلوب نصل إلى $x=c_2\begin{bmatrix}8/7\\-4/7\\-1\end{bmatrix}$.

---

(٢) حل المعادلات $\begin{bmatrix}1&0&-3&0&0\\2&1&3&0&0\\1&1&6&0&0\\4&5&1&1&0\\3&2&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\\u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\6\\\alpha\\3\\3\end{bmatrix}$.

الحل :

باستعمال التجزئ :

$$\left[\begin{array}{ccc|cc}1&0&-3&0&0\\2&1&3&0&0\\1&1&6&0&0\\\hline 4&5&1&1&0\\3&2&1&0&1\end{array}\right]\begin{bmatrix}x\\y\\z\\\hline u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\6\\\alpha\\\hline 3\\3\end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$\begin{bmatrix}1&0&-3\\2&1&3\\1&1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\6\\\alpha\end{bmatrix} \qquad (1)$$

وكذلك

$$\begin{bmatrix}4&5&1\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+I_2\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} \qquad (2)$$

وبحل النظام الفرعي الأول نصل إلى

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&-2\\2&1&3&6\\1&1&6&\alpha\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&-2\\0&1&9&10\\0&0&0&\alpha-8\end{array}\right]$$

★ في حالة $\alpha\neq 8$ فإن الحل $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ غير موجود وبالتالي $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ أيضاً .

* وفي حالة $\alpha = 8$ فإن $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ له مالانهاية من الحلول كالآتي :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 - 32c_1 \\ -1 - 8c_1 \end{bmatrix}$$

---

(٣) حل المعادلات $Ax = b_i$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & -2 & 10 & 6 \\ -1 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad b_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 17 \\ -10 \\ 14 \end{bmatrix} \quad , \quad b_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

الحل :

يمكننا إجراء الآتي :

$$[A \mid b_1 \mid b_2 \mid b_3] = \left[\begin{array}{cccc|c|c|c} 2 & -1 & 4 & 3 & 8 & 3 & 3 \\ 5 & -2 & 10 & 6 & 17 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -5 & -10 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 3 & 6 & 14 & 1 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & 4 & 47 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 18 \end{array}\right]$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3$$

أي أن

$$x_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad , \quad x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 47 \\ 1 \\ 18 \end{bmatrix}$$

---

(٤) إذا كان $A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \\ 2 & 5 & O \\ \hline I & & I \end{array}\right]$ و $B = \left[\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline I & O \end{array}\right]$ **أوجد المصفوفة X بحيث $AX = B$ بفرض وجود قابلية الضرب .**

الحل :

بفرض أن

$$X = \left[\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right]$$

إذن

$$AX = B \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \multirow{2}{*}{O} \\ 2 & 5 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{I} & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} X_{11} & X_{12} \\ \hline X_{21} & X_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline I & O \end{array}\right]$$

ومنها نستنتج الآتي :

- $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X_{11} = O \qquad \Rightarrow \qquad X_{11} = O$ (لأن $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$)
- $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} X_{12} = I \qquad \Rightarrow \qquad X_{12} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- $X_{11} + X_{21} = I \qquad \Rightarrow \qquad X_{21} = I$
- $X_{12} + X_{22} = O \qquad \Rightarrow \qquad X_{22} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

أي أن

$$X = \left[\begin{array}{c|cc} \multirow{2}{*}{O} & -5 & 3 \\ & 2 & -1 \\ \hline \multirow{2}{*}{I} & 5 & -3 \\ & -2 & 1 \end{array}\right]$$

---

(٥) إذا كانت A ذات رتبة $m \times n$ و B ذات رتبة $n \times m$ وكان $m > n$ ، اثبت أن المصفوفة AB تكون شاذة .

الإثبات :

دع $C = AB$ ، إذن C تكون ذات رتبة $m \times m$. ومن المعلوم أن

$$\rho(A) \leq n \quad , \quad \rho(B) \leq m$$

ولكن

$$\rho(C) = \rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\} = \min\{\rho_1, \rho_2\}$$

حيث

$$\min(\rho_1, \rho_2) \leq n$$

وبالتالي فإن $\rho(AB) \le n < m$

أي أن المصفوفة AB مصفوفة شاذة .

---

(٦) إذا كانت A ذات رتبة $m \times n$ و كان $m > n$ ، اثبت أن المصفوفة AA^{*T} تكون شاذة .

الإثبات :

بالرجوع للتمرين السابق مع أخذ $B = A^{*T}$ ، فإن حاصل الضرب $AB = AA^{*T}$ يجب أن يكون شاذاً

---

(٧) اثبت أن $\rho(A-B) \ge \rho(A) - \rho(B)$.

الإثبات :

$$\rho(A) = \rho(A - B + B) \le \rho(A - B) + \rho(B) \quad \Rightarrow \quad \rho(A - B) \ge \rho(A) - \rho(B)$$

---

(٨) أوجد معكوس المصفوفة المُركبة $Z = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 5+i \\ 2 & 2+i & 3+i \\ 5-i & 3+i & 3-i \end{bmatrix}$.

الحل :

بوضع $Z = R + iX$ حيث $R, X \in R^{3\times 3}$ وبافتراض أن Z^{-1} موجـــودة وبجعلهـــا علـــى صـــورة $Z^{-1} = G + iB$ ، إذن

$$I = ZZ^{-1} = (R + iX)(G + iB) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} RG - XB = I & (1) \\ XG + RB = O & (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نستنتج أن

$$G = -X^{-1}RB$$

(وذلك بفرض وجود X^{-1}) . وبالتالي يمكن إيجاد B (بالتعويض في (1)) كالآتي :

$$RG - XB = I \quad \Rightarrow \quad -RX^{-1}RB - XB = I \quad \Rightarrow \quad (RX^{-1}R + X)B = -I$$

أي أن

$$B = -(RX^{-1}R + X)^{-1}$$

وفي مسألتنا هذه :

$$R=\begin{bmatrix}1&2&5\\2&2&3\\5&3&3\end{bmatrix} \quad , \quad X=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&1&-1\end{bmatrix}$$

وعلى القارئ إيجـــاد X^{-1} ثـــم $B=-\left(RX^{-1}R+X\right)^{-1}$ ثـــم $G=-X^{-1}RB$ .. وأخـــيراً تكـــون $Z^{-1}=G+iB$.

٢-٥ مسائل على الباب الثاني

(١) حل النظم الآتية بأكثر من طريقة مباشرة :

$$\text{(i)}\quad \begin{bmatrix}1&2&4&-1\\1&3&5&0\\1&2&5&1\\0&1&1&0\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}6\\9\\9\\2\end{bmatrix} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{bmatrix}1&3&-1&0\\2&6&5&4\\2&5&3&4\\3&0&0&7\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}-5\\4\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{(iii)}\quad \begin{bmatrix}5&1&1&0\\0&4&0&1\\0&0&2&1\\-2&1&0&4\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}3\\4\\-4\\-1\end{bmatrix} \qquad \text{(iv)}\quad \begin{bmatrix}0&0&3&1\\5&1&1&0\\0&4&2&1\\1&1&0&-3\end{bmatrix}x=\begin{bmatrix}2\\7\\5\\-5\end{bmatrix}$$

(٢) حل النظم في المسألة (1-iii) بطريقة جاكوبي ضامناً التقارب .

(٣) حل النظم في المسألة (1-iv) بطريقة جاوس ـــ سيدل .

(٤) حل النظم في المسألة (1-iv) بطريقة SOR مُقدراً قيمة w .

(٥) اثبت أن

$$x^{(k)}=D^{-1}(L+U)x^{(k-1)}+D^{-1}b \quad , \quad k=1,2,\cdots$$

هي المعادلة التكرارية لطريقة جاكوبي ، حيث

$$D=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad , \quad L=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{ij} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad U=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & -a_{ij} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

و $A=\lfloor a_{ij} \rfloor$ هي مصفوفة المعاملات .

(٦) اثبت أن

$$x^{(k)}=(D-L)^{-1}Ux^{(k-1)}+(D-L)^{-1}b \quad , \quad k=1,2,\cdots$$

هي المعادلة التكرارية لطريقة جاوس ــ سيدل ، حيث D , L , U ، A هي المصفوفات المُعرفة في المسألة (٥)

(٧) أوجد معكوس المصفوفة

$$Z=\begin{bmatrix} 2+i & 3 & 5+i \\ 3 & 2+i & 3+i \\ 5-i & 3+i & 3-i \end{bmatrix}$$

(٨) اثبت عارض المعكوس ***Matrix Inversion Lemma***

$$\left[P^{-1}+H^TQH\right]^{-1}=P-PH^T\left[HPH^T+Q^{-1}\right]HP$$

<u>مساعدة :</u> يمكن استعمال التجزئ

$$A_{n\times n}=\left[\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right] \quad , \quad A^{-1}=B_{n\times n}=\left[\begin{array}{c|c} B_1 & B_2 \\ \hline B_3 & B_4 \end{array}\right]$$

واستعمال ناتج المعادلتين

$$AB=I \quad , \quad BA=I$$

مع إعادة تسمية

$$A_1=P^{-1} \quad , \quad A_2=-H^T \quad , \quad A_3=H \quad , \quad A_4=Q^{-1}$$

(٩) حل نظم المعادلات

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x=\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ \alpha \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} .$$

(١٠) أوجد قيم c, d في الحالتين :

أ ـــ لا يوجد حل . ب ـــ يوجد أكثر من حل

وذلك للنظم

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 5 \\ 5 & 3 & -6 & 7 \\ 3 & 2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & -6 & -1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 22 \\ 40 \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

(١١) إذا كان $Ax = By$ حيث $x, y \in R^n$ و $A, B \in R^{n\times n}$ ، استخدم حذف جاوس للحصـــول على مصفوفة $A^{-1}B$ إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 9 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

(١٢) إذا كان $A, B, X \in R^{n\times n}$ ، أوجد X إذا كان $AX = B$ وكان

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & \\ 2 & 5 & O \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{I} & I \end{array}\right] \quad , \quad B = \left[\begin{array}{c|c} O & I \\ \hline I & O \end{array}\right]$$

(١٣) أوجد الشرط حتى يكون للنظم

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x \\ \hline u \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} v \\ \hline y \end{array}\right]$$

حلاً في x, y .

(١٤) حاول إثبات كل قوانين الدرجة الموجودة في هذا الباب .

الباب الثالث

مشكلة القيم الذاتية للمصفوفات
MATRIX EIGENVALUE PROBLEM

٣-١ مقدمة :

دعنا نقدم هذا الباب بالمثال الذي يُوضح المشكلة بشكلٍ مُيّسرٍ على الأفهام . فعند حل المعادلة $ax = \lambda x$ ، حيث كلٌ من a,λ,x **كميات مقياسية *Scalars*** ، فإن هذه المعادلة البسيطة في x تعــود إلى الآتي :

$$(a-\lambda)x = 0$$

والحل التافه *Trivial Solution* لهذه المعادلة هو أن $x = 0$. ولمنع هذا الحل التافه من الحدوث فإننــا نضع شرطاً وهــو أن $(a-\lambda) = 0$ .. أي أن $\lambda = a$ ، أي أنه عند هــذه **القيمة الذاتيــة** لــــ λ فإن النظم يُعطي مالانهاية من الحلول لــ x .

والمشكلة القياسية *Standard Problem* للقيم الذاتية في المصفوفات هـــي حـــل المعـــادلات $Ax = \lambda x$ حيث λ مازالت كمية مقياسية ولكن $A \in R^{n\times n}$ أو $A \in C^{n\times n}$ ، وكذلــك $x \in R^n$ أو $x \in C^n$. والمطلوب هو معرفة قيم λ التي تمنع الحل التافه $x = 0$ لهذا النظم من المعادلات . وبنفس أسلوب التحليل السابق (مع مراعاة المصفوفات) فإننا نصل إلى

$$(A-\lambda I)x = 0$$

وأن الشرط هو

$$|A-\lambda I| = 0$$

وهذه **المعادلة الذاتية *Characteristic Equation*** تُعطي **القيم الذاتية *Eigenvalues*** والـــتي ينعـــدم عنـــدهــــا الحل التافه .. بل تُعطي مالانهاية من الحلول التي تحقق المعادلة المتجانسة $(A-\lambda I)x = 0$. ويُسمى x حينئذٍ بـــ **المتجه الذاتي *Eignvector*** المُصاحِب للقيمة الذاتية λ . وهنـــاك تســـميات

أخرى لهذه المشـــكلة مثـــل Latent Roots (و Characteristic Roots) أو Latent Vectors (و Characteristic Vectors) .. لكن التسمية Eigenvalue (و Eigenvectors) هي الأكثر شهرة في مجال الرياضيات .

وهناك تقديم للعديد من صور مشكلة القيم الذاتية مما يُسمى بـــ **مشكلة القيم الذاتية العامة** ***Generalized Eigenvalue Problem*** مثل

$$Ax = \lambda Bx$$

حيث A مصفوفة متماثلة و B مصفوفة **موجبة تحديداً** ***Positive Definite*** وهي تلك المصفوفة التي لها الخاصية :

$$x^{*T} Bx > 0$$

لأي متجه غير صفري x . وهذه المشكلة يمكن تحويلها إلى المشكلة القياسية المكافئة

$$Cy = \lambda y$$

وذلك بوضع $B = LL^T$ حيث L مصفوفة مثلثية سفلى .. ويُســـمى ذلـــك بتحليـــل **كولوســـكي** ***Cholesky*** ، وبالتالي

$$Ax = \lambda LL^T x = L\lambda L^T x \quad \Rightarrow \quad L^{-1} Ax = \lambda L^T x \quad \Rightarrow \quad L^{-1} A\left(L^T\right)^{-1} L^T x = \lambda L^T x$$

وبوضع $y = L^T x$ نجد أن

$$L^{-1} A\left(L^T\right)^{-1} y = \lambda y$$

وبوضع $C = L^{-1} A\left(L^{-1}\right)^T$ ومراعاة أن $\left(L^T\right)^{-1} = \left(L^{-1}\right)^T$ نصل إلى الصورة القياسية

$$Cy = \lambda y$$

ويكون

$$x = \left(L^T\right)^{-1} y$$

مع ملاحظة أن المصفوفات الموجبة تحديداً تكون دائماً غير شاذة .

وهناك صور شبيهة أخرى مثل $ABx = \lambda x$ حيث B , A مصفوفتان متماثلتان وإحداهما على الأقل موجبة تحديداً . ويمكن عن طريق تحليل مماثل لتحليل كولوسكي أن نصل إلى المشكلة القياسية $Dy = \lambda y$ حيث $D = L^T AL$ (هذا إذا كانت B موجبة تحديداً) .

كذلك هناك صور عامة أخرى أنقلها من كتاب (Gourlay & Watson , 1973 , p.120) مثل

$$\left(A_0\lambda^r + A_1\lambda^{r-1} + \cdots\cdots\cdots + A_r\right)x = 0$$

حيث r عدد صحيح موجب و A_0^{-1} موجودة . هذه الصورة يمكن أيضاً تحويلها إلى الصورة القياسية بالتعويضات الآتية :

$$\begin{array}{lll} x_i = \lambda x_{i-1} & , \quad i = 1,2,\cdots\cdots,r-1 & , \quad x_0 = x \\ B_i = -A_0^{-1}A_i & , \quad i = 1,2,\cdots\cdots,r & \end{array}$$

وبالتالي

$$A_0\lambda^r x + A_1\lambda^{r-1}x + \cdots\cdots\cdots + A_{r-1}\lambda x + A_r x = 0$$

وبالضرب في A_0^{-1} :

$$\lambda^r \underbrace{Ix}_{=x} + \lambda^{r-1}\underbrace{A_0^{-1}A_1}_{=-B_1}x + \lambda^{r-2}\underbrace{A_0^{-1}A_2}_{=-B_2}x + \cdots\cdots\cdots + \lambda\underbrace{A_0^{-1}A_{r-1}}_{=-B_{r-1}}x + \underbrace{A_0^{-1}A_r}_{=-B_r}x = 0$$

وهي تكافئ

$$\lambda x_{r-1} - B_1\lambda^{r-1}x_{r-2} - \cdots\cdots\cdots - B_{r-1}\lambda x_0 - B_r x_0 = 0$$

أي

$$B_1x_{r-1} + B_2x_{r-2} + \cdots\cdots\cdots + B_{r-1}x_1 + B_r x_0 = \lambda x_{r-1}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$\begin{bmatrix} 0 & I & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & I \\ B_r & B_{r-1} & B_{r-2} & B_{r-3} & \cdots & \cdots & B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{r-2} \\ x_{r-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{r-2} \\ x_{r-1} \end{bmatrix}$$

وهي معادلة على الصورة

$$Sy = \lambda y$$

حيث S **مصفوفة غالب على عناصرها الأصفار** ***Sparse Matrix*** وهو نظم له طرق تكرارية لحلـــه ولكنها لن تُناقش في هذا الكتاب .

في النهاية نصل لقرارٍ هام وهو وجوب دراسة المشكلة القياسية دراسة مُستفيضة لذاتهـــا ولأن غيرها من المشاكل الأعم يؤول إليها .

٣-٢ المشكلة القياسية للقيم الذاتية

STANDARD EIGENVALUE PROBLEM

علمنا أنه لحل مشكلة القيم الذاتية $Ax = \lambda x$ ، فإنه يلزم حساب المحدد $|A-\lambda I|$ وهذا يُعطي المعادلة الذاتية *Characteristic Equation* :

$$|A-\lambda I| = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \cdots\cdots + \alpha_n\lambda^n = 0$$

والتي لها n من الجذور $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots, \lambda_n$. ولكل قيمة ذاتية λ_i هناك حلـــول لانهائيـــة للمعادلـــة المتجانسة

$$(A - \lambda_i I)x_i = 0$$

وواحد من هذه الحلول هو المتجه الذاتي x_i المصاحب للقيمة الذاتية λ_i .

مثال : أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمشكلة القياسية $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x = \lambda x$.

الحل :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A-\lambda I| = 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 4 \;\;,\;\; \lambda_2 = -2$$

• عند $\lambda_1 = 4$:

$$(A-\lambda 1I)=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن $x_1 = c_1\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ .. ليكن $x_1 = u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

• بالمثل ، عند $\lambda_2 = -2$ فإن $x_2 = u_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$.

ونلفت الإنتباه مُبكراً للاختبارات والنتائج الهامة التالية (التي سوف نثبتها لاحقاً) :

(i) $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = tr(A)$ (ii) $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

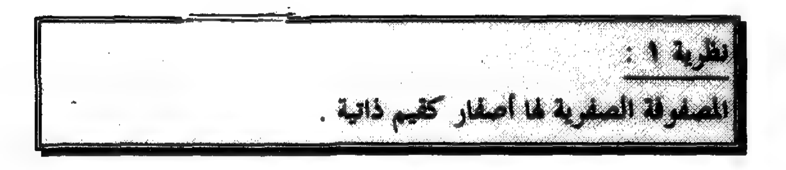
<u>فمثلاً</u> في المثال السابق نجد أن

$$\lambda_1+\lambda_2=(4)+(-2)=2 \quad , \quad tr(A)=1+1=2$$
$$\lambda_1\lambda_2=(4)(-2)=-8 \quad , \quad |A|=(1)(1)-(3)(3)=-8$$

وأيضاً نلفت الانتباه إلى أن x_1,x_2 متعامدان .. أي أن $\langle x_1,x_2\rangle = 0$ وهي خاصية للمصفوفات المتماثلة .

دعنا نعرف أكثر عن هذه الخصائص المثيرة :

٣-٢-١ نظريات *Theorems*


نظرية ١ :
المصفوفة الصفرية لها أصفار كقيم ذاتية .

<u>**الإثبات :**</u>

$$A=O \Rightarrow |O-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda^n|I|=0 \Rightarrow \lambda^n=0$$

وبالتالي $\lambda_i=0 \quad , \quad \forall i=1,2,\cdots\cdots,n$

نظرية ٢ :

مصفوفة الوحدة لها الوحدة كقيم ذاتية .

الإثبات :

$$A = I \Rightarrow |I - \lambda I| = 0 \Rightarrow |(1-\lambda)I| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^n |I| = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^n = 0$$

وبالتالي $\lambda_i = 1 \quad , \quad \forall i = 1,2,\cdots\cdots,n$

نظرية ٣ :

المصفوفة القطرية $D = diag(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\cdots, \alpha_n)$ **لها**

$$\boxed{\lambda_i = \alpha_i \quad , \quad \forall i = 1,2,\cdots\cdots,n}$$

وتكون متجهاتها الذاتية هي المتجهات الأولية *Elementary Vectors*

الإثبات :

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix} \Rightarrow |D - \lambda I| = 0 \Rightarrow \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \alpha_i) = 0$$

وبالتالي $\lambda_i = \alpha_i \quad , \quad \forall i = 1,2,\cdots\cdots,n$

وعند $\lambda_i = \alpha_i$ ، نحل المعادلات $(D - \alpha_i I)x_i = 0$:

$$(D - \alpha_i I)x_i = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_i - \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_i - \alpha_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_i - \alpha_n \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}_{x_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على المعادلات

$$(\alpha_i - \alpha_j)b_j = 0 \quad , \quad \forall i, j = 1,2,\cdots\cdots,n$$

أي أن

$$b_j = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ c(=1 \text{ say}) & j = i \end{cases}$$

حيث c قيمة عامة اختيارية (أخذناها الوحدة) . وبالتالي سيكون المتجه الذاتي المصاحب للقيمة الذاتية α_i هو المتجه الأولي رقم i .

نظرية ٤ :

المصفوفة A تكون شاذة إذا وإذا فقط كانت إحدي قيمها الذاتية صفراً .

الإثبات :

من الخاصية (ii) التي أشرنا لها سابقاً (وسنثبتها لاحقاً) :

$$|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

فإذا ما كانت إحدى القيم الذاتية صفراً فإن المحدد $|A|$ ينعدم وبالتالي تكون A شاذة .

نظرية ٥ :

المصفوفتان A, A^T لهما نفس القيم الذاتية .

الإثبات :

من المعروف في الباب الأول أن

$$|A| = |A^T|$$

وبالتالي فإن

$$|A^T - \lambda I| = \left|\left(A^T - \lambda I\right)^T\right| = |A - \lambda I|$$

أي أن A, A^T لهما نفس **الحدودية الذاتية** ***Characteristic Polynomial*** وهذا بدوره يؤدي إلى أنهما لهما نفس القيم الذاتية .

نظرية ٦ :

إذا كانت L مصفوفة غير شاذة ، فإن :

(i) $A, L^{-1}AL$ لهما نفس القيم الذاتية .

(ii) المتجهات الذاتية لـــــ $L^{-1}AL$ هي حاصل ضـــرب L^{-1} في المتجهات الذاتية لـــــ A .

الإثبات :

(i)

$$\left|L^{-1}AL-\lambda I\right|=\left|L^{-1}AL-\lambda L^{-1}L\right|=\left|L^{-1}(A-\lambda I)L\right|$$
$$=\left|L^{-1}\right|\left|A-\lambda I\right|\left|L\right|=\underbrace{\left|L^{-1}L\right|}_{=1}\left|A-\lambda I\right|=\left|A-\lambda I\right|$$

أي أن $A, L^{-1}AL$ لهما نفس الحدودية الذاتية وبالتالي نفس القيم الذاتية .

(ii) لنفرض أن u هو المتجه الذاتي للمصفوفة A المصاحب للقيمة الذاتيـــة λ وأن v هـــو المتجه الذاتي للمصفوفة $L^{-1}AL$ المصاحب لنفس القيمة الذاتية λ ، إذن

$$Au=\lambda u \qquad (1)$$

و

$$L^{-1}ALv=\lambda v \;\Rightarrow\; ALv=\lambda Lv \;\Rightarrow\; A(Lv)=\lambda(Lv) \qquad (2)$$

وبمقارنة (2) , (1) نستنتج أن

$$u=Lv \;\Rightarrow\; v=L^{-1}u$$

نظرية ٧ :

إذا كانت A مصفوفة حقيقيـــة *Real Matrix* ، فـــإن معـــاملات الحدودية الذاتية لهـــا يجـــب أن تكـــون حقيقيـــة . وإذا كـــانت $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$ قيمـــة ذاتيـــة مركبـــة لهـــا فـــإن مرافقهـــا $\lambda_k=\lambda_j^*=\alpha_j-i\beta_j$ هو أيضاً قيمة ذاتية للمصفوفة A . أيضـــاً إذا

كان u_j هو المتجه الذاتي المصاحب للقيمة الذاتية المركبة λ_j ، فإن المتجه الذاتي u_k المصاحب للقيمة الذاتية λ_k هو مرافق u_j ؛ أي $u_k = u_j^*$.

الإثبات :

متروك للقارئ ويمكن مراجعة نظرية المعادلات .

نظرية ٨ :

إذا كان u هو متجه ذاتي للمصفوفة A والمصاحب للقيمة الذاتية λ ، فإن αu (حيث α كمية مقياسية) يكون أيضاً متجه ذاتي للمصفوفة A ومصاحب لنفس القيمة الذاتية λ .

الإثبات :

$$Au = \lambda u \quad \Rightarrow \quad \alpha Au = \alpha \lambda u \quad \Rightarrow \quad A(\alpha u) = \lambda(\alpha u)$$

وبالتالي فإن αu متجه ذاتي للمصفوفة A مصاحب للقيمة الذاتية λ .

تعريف : التكرارية *Multiplicity*

إذا تكررت القيمة الذاتية λ عدداً من المرات قدره m ، فإننا نقول أن λ هي قيمة ذاتية ذات تكرارية m .

ملحوظة :

إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ذات تكرارية m ، فبحل نظام المعادلات $(A-\lambda I)x = 0$ نحصل على الأكثر على m من المتجهات الذاتية المستقلة .

نظرية ٩ :

إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ذات تكرارية m وكانت $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_m$ هي المتجهات الذاتية المصاحبة للقيمة الذاتية λ ،

فإن التركيبة الخطية $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i$ تكون أيضاً متجهاً ذاتياً للمصفوفة A ومصاحبة للقيمة الذاتية λ .

الإثبات :

من المعطيات في النظرية :

$$\begin{aligned} Au_1 &= \lambda u_1 \\ Au_2 &= \lambda u_2 \\ &\vdots \\ Au_m &= \lambda u_m \end{aligned}$$

وبضرب المعادلة الأولى في α_1 والثانية في α_2 ... والأخيرة في α_m ثم الجمع ؛ نصل إلى ،

$$A(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots\cdots + \alpha_m u_m) = \lambda(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots\cdots + \alpha_m u_m)$$

أي أن

$$A\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\right) = \lambda\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\right)$$

وبالتالي فإن $\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i u_i\right)$ يكون متجهاً ذاتياً للمصفوفة A مصاحباً للقيمة الذاتية λ .

نظرية ١٠ :

إذا كانت λ قيمة ذاتية للمصفوفة A ولها المتجه الذاتي u ، فإن λ^n تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^n ولنفس المتجه الذاتي u ؛ حيث n عدد صحيح بشكلٍ عامٍ وبشرط وجود A^{-1} .

الإثبات :

- **إذا كانت $n \in N^+$ حيث N^+ هي مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة :**

حيث أن $Au = \lambda u$ ، إذن بالضرب (من جهة اليسار) في A :

$$A^2 u = A(Au) = A(\lambda u) = \lambda(Au) = \lambda(\lambda u) = \lambda^2 u$$

وبالاستمرار في الضرب (من جهة اليسار) في A :

$$A^3u = \lambda^3 u$$
$$A^4u = \lambda^4 u$$
$$\vdots$$
$$A^n u = \lambda^n u$$

وبالتالي فإن λ^n تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^n ولنفس المتجه الذاتي u ؛ حيث n عدد صحيح موجب .

• **إذا كانت $n \in N^-$ حيث N^- هي مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة :**

حيث أن $Au = \lambda u$ ، إذن $\frac{1}{\lambda} u = A^{-1}u$ وذلك بفرض وجود A^{-1} . وبالتالي فإن A^{-1} لها u كمتجه ذاتي مصاحب للقيمة الذاتية $\frac{1}{\lambda}$. وبالضرب (من جهة اليسار) في A^{-1} :

$$A^{-2}u = A^{-1}\left(A^{-1}u\right) = A^{-1}\left(\lambda^{-1}u\right) = \lambda^{-1}\left(A^{-1}u\right) = \lambda^{-1}\left(\lambda^{-1}u\right) = \lambda^{-2}u$$

وبالاستمرار في الضرب (من جهة اليسار) في A^{-1} :

$$A^{-3}u = \lambda^{-3}u$$
$$A^{-4}u = \lambda^{-4}u$$
$$\vdots$$
$$A^{-m}u = \lambda^{-m}u$$

(حيث m عدد صحيح موجب) وبالتالي فإن λ^n تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^n ولنفس المتجه الذاتي u ؛ حيث n عدد صحيح سالب وبشرط وجود A^{-1} .

• **إذا كانت $n = 0$:**

$$A^0 = I \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

إذن العبارة الرياضية التي تقول أن λ^n تكون قيمة ذاتية للمصفوفة A^n ولنفس المتجه الذاتي u صحيحة لجميع قيم n كعدد صحيح بشكلٍ عامٍ وبشرط وجود A^{-1} .

ملحوظة :

النظرية السابقة لها أهمية كبيرة في حسابات المشكلة الذاتية لقوى المصفوفة ومعكوسها . فمثلاً إذا أردنا حساب القيم الذاتية لـ A^4 فإننا نحسب القيم الذاتية لـ A وكذلك متجهاتها الذاتية . فإذا كانت A لها (λ,u) ، فإن A^4 يكون لها (λ^4,u) مع عدم وجود داعي لحساب A^4 كمصفوفة .

نظرية ١١ :

إذا كانت A لها (λ,u) ، فإن $f(A)$ يكون لها $(f(\lambda),u)$ حيث :

$$f(A)=\sum_{i=1}^{m} a_i A^i$$

الإثبات :

باستعمال نتائج النظرية السابقة (نظرية ١٠) :

$$f(A)u=\left(\sum_{i=1}^{m} a_i A^i\right)u=\sum_{i=1}^{m} a_i\left(A^i u\right)=\sum_{i=1}^{m} a_i\left(\lambda^i u\right)=\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \lambda^i\right)}_{f(\lambda)}u=f(\lambda)u$$

أي أن فإن $f(A)$ يكون لها $(f(\lambda),u)$.

ملحوظة :

يمكن مد $f(A)$ على الصورة $f(A)=\sum_{i=1}^{m} a_i A^i$ بشروط تخص القيم الذاتية لـ A (وسوف نناقش ذلك في الباب الرابع) . وبفرض وجود هذا المد فإن النظرية السابقة (نظرية ١١) تكون بالغة الأهمية في الحسابات .. وعلى سبيل المثال ؛ إذا كانت A لها (λ,u) ، فإن $\left(A^2+3A+5I\right)$ لها $\left(\lambda^2+3\lambda+5,u\right)$ ، $(\sin(A))$ لها $(\sin(\lambda),u)$ ، و $\left(e^A\right)$ لها $\left(e^\lambda,u\right)$.

وعلى القارئ أن يُلاحِظ أننا لسنا بحاجة لحساب الدالة المصفوفية على الإطلاق .

نظرية ١٢ :

القيم الذاتية للمصفوفة المتماثلة الحقيقية *Real Symmetric Matrix* تكون قيماً حقيقية ومتجهاتها الذاتية تكون متعـــامدة *Orthogonal* وذلك إذا كانت قيمها الذاتية متميزة *Distinct* عن بعضها البعــض (أي إذا كانت $\forall i \neq j \ , \lambda_i \neq \lambda_j$) ، وفي حالة عدم التمـــيز يمكـــن جعلها متعامدة .

الإثبات :

لنفرض أن A لها (λ_i, u_i) وكذلك (λ_j, u_j) ، إذن :

$$Au_i = \lambda_i u_i \qquad , \qquad Au_j = \lambda_j u_j$$

وبضرب الأولى (من اليسار) في u_j^{*T} وبأخذ عمليتي * و T للثانية نحصل على :

$$u_j^{*T} Au_i = \lambda_i u_j^{*T} u_i \qquad (1)$$

$$(Au_j)^{*T} = (\lambda_j u_j)^{*T} \quad \Rightarrow \quad u_j^{*T} A^{*T} = \lambda_j^* u_j^{*T} \qquad (2)$$

وبضرب المعادلة (2) (من اليمين) في u_i واستخدام $A^{*T} = A$ نصل إلى :

$$u_j^{*T} Au_i = \lambda_j^* u_j^{*T} u_i \qquad (3)$$

وبطرح (1) − (3) :

$$(\lambda_i - \lambda_j^*)\langle u_j, u_i \rangle = 0$$

والمعادلة الأخيرة تؤدي إلى الآتي :

- **إذا كانت** $(i = j)$:

$$(\lambda_i - \lambda_i^*)\|u_i\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = \lambda_i^* \ , \forall i$$

أي أن λ_i كمية حقيقية .

أو

- **إذا كانت** $(i \neq j \ , \lambda_i \neq \lambda_j)$:

$$(\lambda_i - \lambda_i^*)\langle u_j, u_i \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle u_j, u_i \rangle = 0$$

أي أن u_j, u_i متعامدان .

ملحوظة :

تلعب المصفوفات المتماثلة دوراً هاماً في كثيرٍ من التطبيقات الهندسية والفيزيائية .. ولذلك يجب الإنتباه إلى خواصها .

نظرية ١٣ :

إذا كانت A مصفوفة متماثلة بالسالب *Skew Symmetric* ، فإن :

- **قيمها الذاتية تكون تخيلية *Pure Imaginary* .**
- **متجهاتها الذاتية تكون متعامدة بالتبادل *Biorthogonal* (إذا كانت القيم الذاتية متميزة) .**

الإثبات : متروك للقارئ كتمرين .

نظرية ١٤ :

إذا كانت A مصفوفة هيرميتية ، فإن :

- **قيمها الذاتية تكون حقيقية .**
- **متجهاتها الذاتية تكون متعامدة بالتبادل *Biorthogonal* (إذا كانت القيم الذاتية متميزة) .**

الإثبات : متروك للقارئ كتمرين .

نظرية ١٥ :

إذا كانت A مصفوفة هيرميتية بالسالب *Skew Hermitian* ، فإن :

- **قيمها الذاتية تكون تخيلية *Pure Imaginary* .**
- **متجهاتها الذاتية تكون متعامدة بالتبادل *Biorthogonal* (إذا كانت القيم الذاتية متميزة) .**

الإثبات : متروك للقارئ كتمرين .

نظرية ١٦ :
المتجهات الذاتية المصاحبة لقيم ذاتية متميزة تكون مستقلة .

الإثبات :

دع $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية لـــ A بحيث $(\lambda_i \neq \lambda_j\ ,\ \forall i \neq j)$. كذلك دع $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ هي المتجهات الذاتية المصاحبة لهذه القيم الذاتية على الترتيب ، إذن لجميع قيم i :

$$\left.\begin{array}{l} Au_i = \lambda_i u_i \\ A^2 u_i = \lambda_i^2 u_i \\ A^3 u_i = \lambda_i^3 u_i \\ \vdots \\ A^n u_i = \lambda_i^n u_i \end{array}\right\} \quad \forall i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

وبتكوين التركيبة الخطية *Linear Combination*

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 + \cdots\cdots + c_n u_n = 0 \qquad (1)$$

وضربها من اليسار في $A, A^2, A^3, \cdots\cdots, A^{n-1}$ على الترتيب ، نحصل على :

$$c_1 \lambda_1 u_1 + c_2 \lambda_2 u_2 + c_3 \lambda_3 u_3 + \cdots\cdots + c_n \lambda_n u_n = 0 \qquad (2)$$

$$c_1 \lambda_1^2 u_1 + c_2 \lambda_2^2 u_2 + c_3 \lambda_3^2 u_3 + \cdots\cdots + c_n \lambda_n^2 u_n = 0 \qquad (3)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$c_1 \lambda_1^{n-1} u_1 + c_2 \lambda_2^{n-1} u_2 + c_3 \lambda_3^{n-1} u_3 + \cdots\cdots + c_n \lambda_n^{n-1} u_n = 0 \qquad (n)$$

والمعادلات من (1) إلى (n) يمكن كتابتها على الصورة :

$$\underbrace{\left[c_1 u_1 \mid c_2 u_2 \mid c_3 u_3 \mid \cdots \mid c_n u_n\right]}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{\Psi} = O$$

أو

$$T\Psi = O$$

والمصفوفة Ψ بتكوينها هذا $(\lambda_i \neq \lambda_j)$ تكون غير شاذة (أنظر الباب الأول ـــ فصل المحـــــددات) ، وبالتالي فإن :

$$T = O$$

وهذا لا يحدث إلا إذا كانت

$$c_i = 0 \quad , \quad \forall i$$

ومن ثم تكون التركيبة الخطية (1) صحيحة فقط إذا كانت $c_i = 0$ لجميع قيم i .. وهــذا يعــني أن المتجهات $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n$ مستقلة خطياً .

ويُمكن للقارئ أن ينتقل إلى الفصل ٣-٥ للتدريب على بعض أنواع المسائل كتطبيق علــى النظريــات السـابقة ، أو أن يُؤجل ذلك حتى يتعرف على بعض الطرق العددية للحصــول علــى القيم الذاتية ومتجهاتها وسوف يتم ذلك في الفصل ٣-٤ .

٣-٣ ضرب كرونكر والقيم الذاتية

نظرية :

إذا كان $A_{n\times n}$ لها القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n$ ومتجهــات ذاتيــة مصاحبة $u_1, u_2, \cdots\cdots, u_m$ على الترتيب وكانت N^- لها القيم الذاتية $\mu_1, \mu_2, \cdots\cdots, \mu_m$ ومتجهات ذاتية مصاحبة $y_1, y_2, \cdots\cdots, y_m$ علــى الترتيب ، فإن حاصل الضرب $A \otimes B$ له mn من القيــم الذاتيــة $\lambda_i \mu_j$ ومتجهات ذاتية مصاحبة $u_i \otimes y_j$.

وقبل البدء في إثبات النظرية ، فإني أرجو القارئ أن يعود إلى الباب الأول ـــ الفصل الخاص بضرب كرونكر .

الإثبات :

$$(A \otimes B)(u_i \otimes y_j) = Au_i \otimes By_j = \lambda_i u_i \otimes \mu_j y_j = (\lambda_i \mu_j)(u_i \otimes y_j)$$

وبالتالي فإن $A \otimes B$ لها قيم ذاتية $\lambda_i \mu_j$ ومتجهات ذاتية مصاحبة $u_i \otimes y_j$.

نظرية :

إذا كان A لها القيم الذاتية λ_i وكانت B لها القيم الذاتية μ_j ، فإن $D = A \otimes I_m + I_n \otimes B^T$ لها قيم ذاتية $(\lambda_i + \mu_j)$.

الإثبات :

لتكن ε كمية مقياسية إختيارية ، إذن

$$(I_n + \varepsilon A) \otimes (I_m + \varepsilon B^T) = I_n \otimes I_m + \varepsilon \underbrace{(A \otimes I_m + I_n \otimes B^T)}_{D} + \varepsilon^2 A \otimes B^T$$

أو بتعبيرٍ آخر

$$(I_n + \varepsilon A) \otimes (I_m + \varepsilon B^T) = I_n \otimes I_m + \varepsilon D + \varepsilon^2 A \otimes B^T \qquad (1)$$

ولكن القيم الذاتية للمصفوفتين $(I + \varepsilon A), (I + \varepsilon B^T)$ هي $(1 + \varepsilon \mu_j), (1 + \varepsilon \lambda_i)$ على الترتيب (تمريـــن للقارئ) وبالتالي فإن

$$(1 + \varepsilon \lambda_i)(1 + \varepsilon \mu_j) = 1 + \varepsilon(\lambda_i + \mu_j) + \varepsilon^2 \lambda_i \mu_j \qquad (2)$$

ولكن ε كمية اختيارية ، إذن بمقارنة (1) و (2) نجد أن D يجب أن يكون لها القيم الذاتية $(\lambda_i + \mu_j)$

عارض ١ :

المصفوفة D المُعَّرفة في النظرية السابقة والناتجة من حل المعـــادلات المصفوفية $AX + XB = C$ السابق مناقشتها في الباب الثاني ، تكون غير شاذة إذا كان الجمع $(\lambda_i + \mu_j) \neq 0$.

٣-٤ إيجاد القيم الذاتية عددياً *APPROXIMATING EIGENVALUES*

٣-٤-١ طريقة القوى *The Power Method* :

تفترض في هذه الطريقة أن القيم الذاتية متميزة وأن لها مجموعة مستقلة من المتجهات الذاتية .

وتفترض أيضاً وجود قيمة ذاتية هي الأكبر عددياً *Laregest in Magnitude* .

دع $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة $A \in R^{n\times n}$ بحيث $|\lambda_1|>|\lambda_2|\geq\ldots\ldots\geq|\lambda_n|$ ، فإذا كان $x \in R^n$ والمتجهات الذاتية للمصفوفة A هي $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots\ldots, v^{(n)}$ مستقلة ، إذن

$$x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v^{(j)}$$

وبضرب المعادلة السابقة من اليسار في $A, A^2, A^3, \ldots\ldots, A^k$ على الترتيب ، نحصل على :

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v^{(j)}$$

$$A^2 x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 v^{(j)} = \lambda_1^2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^2 v^{(j)}$$

$$A^3 x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^3 v^{(j)} = \lambda_1^3 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^3 v^{(j)}$$

$$\vdots$$

أي أن

$$A^k x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^k v^{(j)} = \lambda_1^k \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k v^{(j)} \;, k = 1,2,\cdots\cdots$$

ولكننا افترضنا أن

$$|\lambda_1| > |\lambda_j| \quad , \quad \forall j = 2,3,\cdots\cdots, n$$

إذن

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k = 0 \quad , \quad \forall j, k$$

وبالتالي فإن

$$\lim_{k\to\infty} A^k x = \lim_{k\to\infty} \lambda_1^k \alpha_1 v^{(1)} \qquad (1)$$

فإذا كان $\alpha_1 \neq 0$ فإن المتتابعة الأخيرة إما أن تتقارب إلى الصفر (وذلك إذا ما كان $|\lambda_1| < 1$) وإما أن تتباعد (إذا ما كان $|\lambda_1| \geq 1$) .

والآن دعنا نقوم بعمل **مقياس** ***Scaling*** للقوى $A^k x$ للتأكيد على أن النهاية في (1) محدودة وغير صفرية . ولعمل ذلك نختار x من البداية متجه وحدة *Unit Vector* $x^{(0)}$ منسوباً إلى $\|\cdot\|_\infty$ (مقياس $-\infty$) وأن فيه عنصر $x_{P_0}^{(0)}$ بحيث

$$x_{P_0}^{(0)} = 1 = \left\|x^{(0)}\right\|_\infty$$

دع

$$y^{(1)} = Ax^{(0)}$$

وعرِّف

$$\mu^{(1)} = y_{P_0}^{(0)}$$

بحيث

$$\mu^{(1)} = y_{P_0}^{(1)} = \frac{y_{P_0}^{(1)}}{x_{P_0}^{(1)}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v_{P_0}^{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_{P_0}^{(j)}}$$

$$= \frac{\alpha_1 \lambda_1 v_{P_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \lambda_j v_{P_0}^{(j)}}{\alpha_1 v_{P_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j v_{P_0}^{(j)}}$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 v_{P_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right) v_{P_0}^{(j)}}{\alpha_1 v_{P_0}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j v_{P_0}^{(j)}} \right)$$

والآن دع P_1 هو أصغر عدد صحيح بحيث $\left|y_{P_1}^{(1)}\right| = \left\|y^{(1)}\right\|_\infty$ ، وعرِّف $x^{(1)}$ كالآتي :

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{y_{P_1}^{(1)}} = \frac{Ax^{(0)}}{y_{P_1}^{(1)}}$$

إذن $\left\|x^{(1)}\right\|_\infty = 1 = x_{P_1}^{(1)}$. والآن عرِّف

$$y^{(2)} = Ax^{(1)} = \frac{A^2 x^{(0)}}{y_{P_1}^{(1)}}$$

وبنفس الأسلوب السابق في حساب $\mu^{(1)}$ نحسب $\mu^{(2)}$:

$$\mu^{(2)} = y_{P_1}^{(2)} = \frac{y_{P_1}^{(2)}}{x_{P_1}^{(1)}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j^2 v_{P_1}^{(j)} \Big/ y_{P_1}^{(1)}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_j v_{P_1}^{(j)} \Big/ y_{P_1}^{(1)}}$$

$$= \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 v_{P_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^2 v_{P_1}^{(j)}}{\alpha_1 v_{P_1}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right) v_{P_1}^{(j)}} \right)$$

كذلك دع P_2 هو أصغر عدد صحيح بحيث $\left|y_{P_2}^{(2)}\right| = \left\|y^{(2)}\right\|_\infty$ ، وعرِّف.

$$x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{y_{P_2}^{(2)}} = \frac{Ax^{(1)}}{y_{P_2}^{(2)}} = \frac{A^2 x^{(0)}}{y_{P_2}^{(2)} y_{P_1}^{(1)}}$$

وهكذا .. حتى نصل إلى $x^{(3)}$. وبشكلٍ عامٍ يمكننا تعريف متتابعة مـــن المتجهـــات $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ و $\{y^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ ومتتابعة من الكميات المقياسية $\{\mu^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ بحيث

$$y^{(m)} = Ax^{(m-1)}$$

والتي تُعطي

$$\mu^{(m)} = y_{P_{m-1}}^{(m)} = \lambda_1 \left(\frac{\alpha_1 v_{P_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^m v_{P_{m-1}}^{(j)}}{\alpha_1 v_{P_{m-1}}^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^{m-1} v_{P_{m-1}}^{(j)}} \right) \qquad (2)$$

$$x^{(m)} = \frac{y^{(m)}}{y_{P_m}^{(m)}} = \frac{A^m x^{(0)}}{\prod_{k=1}^{m} y_{P_k}^{(m)}}$$

حيث (في كل خطوة) تُستعمل P_m للتعبير عن أصغر عدد صحيح بحيث $\left|y_{P_m}^{(m)}\right| = \left\|y^{(m)}\right\|_\infty$. وبدراسة التعبير الرياضي لـــ $\mu^{(m)}$ ، فإن

$$\left|\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right| < 1 \quad , \quad \forall j = 2,3,\cdots\cdots,n$$

وأن

$$\lim_{m\to\infty} \mu^{(m)} = \lambda_1$$

بشرط اختيار $x^{(0)}$ بحيث $\alpha_1 \neq 0$.

وأيضاً يمكن الإثبات أن متتابعة المتجهات $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ تتقارب إلى المتجه الذاتي $v^{(1)}$ المصاحب للقيمة الذاتية λ_1 .

هذا هو الأساس النظري لطريقة القوى *Power Method* .. ولكن لها عيوب في كيفية اختيار $x^{(0)}$ وكذلك محدودة بالطريقة التي فُرِضت بها القيم الذاتية والمتجهات الذاتية .

ولتوضيح ذلك ، خذ مثلاً المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 14 & 0 \\ -5 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

التي لها القيم الذاتية

$$\lambda_1 = 6 \quad , \quad \lambda_2 = 3 \quad , \quad \lambda_3 = 2$$

وباستعمال طريقة القوى ، دع $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (لاحظ أن $\|x^{(0)}\|_\infty = 1$) ، إذن :

$$y^{(1)} = Ax^{(0)} = \begin{bmatrix} 10 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ومن ثم $\|y^{(1)}\|_\infty = 10$ وبالتالي خذ

$$\mu^{(1)} = y_1^{(1)} = 10$$

وخذ

$$x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{10} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

(لاحظ أن $\|x^{(1)}\|_\infty = 1$) .. وبالاستمرار بنفس الأسلوب نحصل على الجدول التالي :

m	$(x^{(m)})^T$	$\mu^{(m)}$
0	$[1 \quad 1 \quad 1]$	———
1	$[1 \quad 0.8 \quad 0.1]$	10
2	$[1 \quad 0.75 \quad 1-0.111]$	7.2
3	$[1 \quad 0.730769 \quad -0.1888034]$	6.5
4	$[1 \quad 0.722200 \quad -0.22085]$	6.230769
5	$[1 \quad 0.718182 \quad -0.235915]$	6.111
6	$[1 \quad 0.716216 \quad -0.243095]$	6.054546
7	$[1 \quad 0.715247 \quad -0.246588]$	6.027027
8	$[1 \quad 0.714765 \quad -0.248306]$	6.013453
9	$[1 \quad 0.714525 \quad -0.249157]$	6.006711
10	$[1 \quad 0.714405 \quad -0.249579]$	6.003352
⋮	⋮	⋮
	↓ $x^{(1)} = [1 \quad 0.714316 \quad -0.249895]^T, \lambda_1 = 6$	

لاحظ أن $x^{(1)}$ متجه وحدة .

وهناك خوارزمي يخص المصفوفة المتماثلة يمكن قراءتــــه في (Burden & Faires , 1993) . إلا أن الخوارزمي السابق يُعتبر خوارزمي عام ، وهذا الخوارزمـــــي مُشــفّر بلغـــة *BASIC* في الملحــق أ (*Appendix A*) .

٣-٤-٢ خوارزمي *Householder* و *QR* :

في حالة كون المصفوفة A متماثلة فإننا يمكننا استعمال طريقة القوى دون مشاكل .. ولكـــن يمكننا تسريع التقارب باستعمال تحويلات *Householder* التي تأخذ الصور :

$$P = I - 2ww^T \quad , \quad w \in R^n$$

والتي لها خاصيتان هامتان :

* المصفوفة P متماثلة *Symmetric* * المصفوفة P وحدوية *Unitary*

وهاتان الخاصتان يمكن إثباتهما بسهولة بحساب P^T ثم إثبات أن $P^T P = I$.

وخوارزمي *Householder* يُحوّل أولاً المصفوفة المتماثلة ذات الرتبة $n \times n$ إلى مصفوفة متماثلة **ثلاثية القطر *Tridiagonal*** و **مُشابهة *similar*** لها (أي لها نفس القيم الذاتية) . وسوف أكتفي هنا بعرض الخوارزمي دون إثبات الطريقة والتي يمكن أن يجدها القارئ المهتم في (*Burden & Faires* , 1993 , *p.* 525) . والخطوة الثانية هي استعمال خوارزمي *QR* لإيجاد القيم الذاتية .

خوارزمي *Householder* :

المُدخلات : الرتبة n والمصفوفة $A = A_{n \times n}$ والمتجهات $u_{n \times 1}$ و $v_{n \times 1}$.

المُخرجات : المصفوفة $A^{(n-1)}$ (في كل خطوة يمكن إعادة تخزين المصفوفات $A^{(k)}$ على المصفوفة A)

الخطوة (١) : لكل قيمة من قيم $k = 1,2,\cdots,n-2$ نفذ الخطوات من الخطوة (٢) حتى الخطوة (١٤) .

الخطوة (٢) : ضع

$$q = \sum_{j=k+1}^{n} \left(a_{jk}^{(k)}\right)^2$$

الخطوة (٣) : إذا كان $a_{k+1,k}^{(k)} = 0$ ، ضع

$$\alpha = -q^{1/2}$$

وإلا ضع

$$\alpha = -\frac{q^{1/2} a_{k+1,k}^{(k)}}{\left|a_{k+1,k}^{(k)}\right|}$$

الخطوة (٤) : ضع

$$RSQ = \alpha^2 - \alpha a_{k+1,k}^{(k)}$$

(ملحوظة : $RSQ = 2r^2$)

الخطوة (٥) : ضع

$$v_k = 0$$

(ملحوظة : $v_1 = v_2 = \cdots = v_{k-1} = 0$ غير ذات أهمية)

وضع

$$\boxed{v_{k+1} = a_{k+1,k}^{(k)} - \alpha}$$

ولقيم $j = k+2, \cdots, n$ ، ضع

$$\boxed{v_j = a_{jk}^{(k)}}$$

(ملحوظة : $w = \frac{v}{\sqrt{2RSQ}} = \frac{v}{2r}$)

الخطوة (٦) : لقيم $j = k, k+1, \cdots, n$ ، ضع

$$\boxed{u_j = \frac{1}{RSQ} \sum_{i=k+1}^{n} a_{ji}^{(k)} v_i}$$

(ملحوظة : $u = \frac{1}{RSQ} A^{(k)} v = \frac{1}{2r^2} A^{(k)} v$)

الخطوة (٧) : ضع

$$\boxed{PROD = \sum_{i=k+1}^{n} v_i u_i}$$

(ملحوظة : $PROD = v^T u = \frac{1}{2r^2} v^T A^{(k)} v$)

الخطوة (٨) : لقيم $j = k, k+1, \cdots, n$ ضع

$$\boxed{z_j = u_j - \left(\frac{PROD}{2RSQ}\right) v_j}$$

ملحوظة :

$$z = u - \frac{1}{2RSQ} v^T uv = u - \frac{1}{4r^2} v^T uv = u - ww^T u = \frac{1}{r} A^{(k)} w - ww^T \frac{1}{r} A^{(k)} w$$

(ملحوظة : إحسب

$$A^{(k+1)} = A^{(k)} - vz^T - zv^T = \left(I - 2ww^T\right) A^{(k)} \left(I - 2ww^T\right)$$)

الخطوة (٩) : لقيم $l = k+1, k+2, \cdots, n-1$ نفذ الخطوات (١٠) و (١١) .

الخطوة (١٠) : لقيم $j = l+1, \cdots, n$ ضع

$$a_{jl}^{(k+1)} = a_{jl}^{(K)} - v_l z_j - v_j z_l$$
$$a_{lj}^{(k+1)} = a_{lj}^{(k+1)}$$

الخطوة (١١) : ضع

$$a_{ll}^{(k+1)} = a_{ll}^{(K)} - 2v_l z_l$$

الخطوة (١٢) : ضع

$$a_{nn}^{(k+1)} = a_{nn}^{(K)} - 2v_n z_n$$

الخطوة (١٣) : لقيم $j = k+2, \cdots, n$ ضع

$$a_{kj}^{(k+1)} = a_{jk}^{(k)} = 0$$

الخطوة (١٤) : ضع

$$a_{k+1,k}^{(k+1)} = a_{k+1,k}^{(k)} - v_{k+1} z_k$$
$$a_{k,k+1}^{(k+1)} = a_{k+1,k}^{(k+1)}$$

(ملحوظة : العناصر الأخرى من $A^{(k+1)}$ هي نفسها العناصر المناظرة لـ $A^{(k)}$)

الخطوة (١٥) : استدع المصفوفة $A^{(n-1)}$ (وهي المخرجات) ثم توقف .

(ملحوظة : المصفوفة $A^{(n-1)}$ متماثلة *Symmetric* ، ثلاثية القطر *Tridiagonal* ، ومشابهة *Similar* للمصفوفة A) .

وكتطبيق على تحويلات *Householder* (مثال مأخوذ من المرجع السابق ، *p.*528) ، دع

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة متماثلة ، إذن

$$q=\sum_{j=2}^{4}\left(a_{j1}\right)^2=(1)^2+(-2)^2+(2)^2=9$$

وحيث أن $a_{21}\neq 0$ ، إذن

$$\alpha=\frac{-3\times 1}{|1|}=-3$$

$$RSQ=(3)^2-(-3)(1)=12$$

$$v=\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5/6 \\ -5/6 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$PROD=6$$

$$z=\begin{bmatrix} 1 \\ -1/6 \\ -1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون

$$A^{(2)}=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 10/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & -4/3 \\ 0 & 4/3 & -4/3 & -1 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن

$$P^{(1)} = I - \frac{1}{RSQ}vv^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

ولسوف يجد القارئ هذا الخوارزمي مُشفّر بلغة *BASIC* في الملحق أ (*Appendix A*) .

٣-٥ تمرينات محلولة على الفصل (٣-٤) :

(١) إثبت أنه للمصفوفة الدورية *Idempotent* تكون القيم الذاتية إما مساوية للصفر أو للواحد الصحيح .

الإثبات :

من المعروف أنه للمصفوفة الدورية A تكون $A^2 = A$ ، وبالتالي فإن

$$\lambda^2 = \lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0\,,1$$

---

(٢) إحسب قيم $a\,,b$ التي تجعل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ 1 & 4 & b \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ لها متجه ذاتي $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. ثم إحسب القيم والمتجهات الذاتية الأخرى .

الحل :

$$Au = \lambda u \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & a & 3 \\ 1 & 4 & b \\ 8 & 2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 16 \\ a = 8 \\ b = 11 \end{cases}$$

ثم بحل المعادلة $|A - \lambda I| = 0$ نحصل على :

$$\lambda^3 - 15\lambda^2 + 20\lambda - 576 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 16)(\lambda^2 + \lambda + 36) = 0$$

وبالتالي

$$\lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{143}}{2}$$

وعلى القارئ أن يحسب u_2, u_3 وأن يتأكد أن $u_3 = u_2^*$.

---

(٣) إثبت أن القيم الذاتية لـ AB و BA تكون متطابقة حيث A, B مصفوفتان مربعتان . ثم أوجد العلاقة بين متجهاتهما الذاتية .

الإثبات :

دع $ABu = \lambda u$ .. بالضرب (من جهة اليسار) في B :

$$BABu = \lambda Bu \quad \Rightarrow \quad (BA)\underbrace{(Bu)}_{=v} = \lambda \underbrace{(Bu)}_{=v} \quad \Rightarrow \quad BAv = \lambda v$$

حيث $v = Bu$ وهذا يعني أنه إذا كان لـ AB (λ, u) ، فإن لـ BA (λ, v) حيث $v = Bu$.

---

(٤) إذا كان $AB = BA$ ، فاثبت أن A, B لهما نفس مجموعة المتجهات الذاتية .

الإثبات :

دع A لها (λ, u) .. أي أن

$$Au = \lambda u \qquad (1)$$

وبضرب (1) من جهة اليسار في B :

$$BAu = \lambda Bu \qquad (2)$$

ثم بضرب (2) من جهة اليسار في A :

$$ABAu = \lambda \underbrace{AB}_{=BA} u = \lambda BAu \quad \Rightarrow \quad A(BAu) = \lambda (BAu)$$

وهذا يعني أن المتجه BAu هو أيضاً متجه ذاتي لـ A لنفس القيمة الذاتية λ .. أي أن

$$BAu = \alpha u$$

حيث α كمية مقياسية . ولكن (من (1))

$$Au = \lambda u$$

إذن

$$B\lambda u = \alpha u \quad \Rightarrow \quad Bu = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) u$$

وهذا يعني أن u متجه ذاتي لـــ B لقيمة ذاتية (α/λ) وهذا يُثبت هذه الخاصية الهامة للمصفوفـــات الإبدالية . ويمكن إضافة أن العلاقة بين القيم الذاتية للمصفوفتين هي أن حاصل ضرب القيم الذاتيـــة المتناظرة دائماً ثابت .. أي أن :

$$\lambda_i(A)\times\lambda_i(B) = \text{ثابت}$$

---

(٥) إحسب القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 2 & 2\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix}$. وإحســـب كذلـــك $T^{-1}AT$ حيث T هي المصفوفة المكونة من المتجهات الذاتية لــ A كأعمدة .

<u>الحل :</u>

من السهل إستنتاج القيم الذاتية للمصفوفة A :

$$\lambda_1=\lambda_2=1 \quad , \quad \lambda_3=10$$

ثم حساب المتجهات الذاتية المصاحبة :

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \quad , \quad u_2=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \quad , \quad u_3=\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}$$

<u>لاحظ</u> أن u_1,u_2 مستقلان خطياً بالرغم من أن لهما نفس القيمة الذاتية 1 . كذلـــك لاحـــظ أن u_3 متعامد على كلٍّ من u_1,u_2 (لماذا ؟) .

والآن دع

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 4 & -2 & 5\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

وبإجراء عملية الضرب

$$T^{-1}AT=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 2 & 2\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 4 & -2 & 5\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}$$

هل ترقى هذه النتيجة إلى مستوى النظرية ؟ سنكتشف ذلك في الفصل القادم .

---

(٦) إذا كانت $A = A_{N\times N} = diag(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m)$ ، أوجد المتجهات الذاتية للمصفوفة A بدلالة المتجهات الذاتية للمصفوفات الفرعية $A_1, A_2, \cdots, A_m$ ، ثم حل مشكلة القيم الذاتية للمصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

الحل :

بالنسبة للمصفوفة A :

$$A = A_{N\times N} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & O & \cdots & O \\ \hline O & A_2 & \cdots & O \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \cdots & A_m \end{array}\right]$$

وبالتالي

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & O & \cdots & O \\ \hline O & A_2 & \cdots & O \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \cdots & A_m \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} u^{(1)} \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \end{array}\right] = \lambda^{(1)}\left[\begin{array}{c} u^{(1)} \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & O & \cdots & O \\ \hline O & A_2 & \cdots & O \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \cdots & A_m \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline u^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \end{array}\right] = \lambda^{(2)}\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline u^{(2)} \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \end{array}\right],$$

....

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} A_1 & O & \cdots & O \\ \hline O & A_2 & \cdots & O \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline O & O & \cdots & A_m \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline u^{(m)} \end{array}\right] = \lambda^{(m)}\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline u^{(m)} \end{array}\right]$$

وهذه تُعطي المعادلات الآتية :

$$A_i u^{(i)} = \lambda^{(i)} u^{(i)} \quad , \quad i = 1,2,\cdots,m$$

والتي يكون لها القيم الذاتية $\{\lambda_1^{(i)},\lambda_2^{(i)},\cdots,\lambda_{m_i}^{(i)}\}$ والمتجهـــات الذاتيـــة $\{u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_{m_i}^{(i)}\}$ ، حيـــث المصفوفة A_i من رتبة m_1 . وبالتالي فإن

$$\{\lambda^{(A)}\}=\{\lambda_1^{(1)},\lambda_2^{(1)},\cdots,\lambda_{m_1}^{(1)},\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\cdots,\lambda_{m_2}^{21)},\cdots\cdots\cdots\lambda_1^{(m)},\lambda_2^{(m)},\cdots,\lambda_{m_m}^{(m)}\}$$

وتكون المتجهات الذاتية كالآتي :

$$\{u^{(A)}\}=\left\{\begin{bmatrix}u_1^{(1)}\\ O\\ O\\ \vdots\\ O\end{bmatrix},\begin{bmatrix}u_2^{(1)}\\ O\\ O\\ \vdots\\ O\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}u_{m_1}^{(1)}\\ O\\ O\\ \vdots\\ O\end{bmatrix},\begin{bmatrix}O\\ u_1^{(2)}\\ O\\ \vdots\\ O\end{bmatrix},\begin{bmatrix}O\\ u_2^{(2)}\\ O\\ \vdots\\ O\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}O\\ u_{m_2}^{(2)}\\ O\\ \vdots\\ O\end{bmatrix},\cdots\cdots\cdots,\begin{bmatrix}O\\ O\\ O\\ \vdots\\ u_1^{(m)}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}O\\ O\\ O\\ \vdots\\ u_2^{(m)}\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}O\\ O\\ O\\ \vdots\\ u_{m_m}^{(m)}\end{bmatrix}\right\}$$

حيث

$$u_i^{(A)}\in R^n$$

ويجب ملاحظة :

* أنه إذا كانت كل المصفوفات A_i مصفوفة شبه سهلة *Semi-Simple* (أنظـــر الفصـــل القادم) ، فإن A تكون أيضاً شبه سهلة .
* أن النتيجة التي حصلنا عليها صالحة لحالة وجود قيم ذاتية مشتركة القيمة بين المصفوفات A_i .

والآن المصفوفة المعطاة يمكن كتابتها على الصورة

$$A=\left[\begin{array}{ccc|cc}5&-2&-4&0&0\\-2&2&2&0&0\\-4&2&5&0&0\\\hline 0&0&0&3&4\\0&0&0&4&-3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}A_1&O\\\hline O&A_2\end{array}\right]$$

ومنها :

$$A_1=\begin{bmatrix}5&-2&-4\\-2&2&2\\-4&2&5\end{bmatrix}\quad,\quad A_2=\begin{bmatrix}3&4\\4&-3\end{bmatrix}.$$

والقيم الذاتية لـــ A_1 هي

$$\{\lambda^{(1)}\} = \{1,1,1,0\}$$

ومتجهاتها الذاتية هي

$$\{u^{(1)}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

والقيم الذاتية والمتجهات الذاتية للمصفوفة A_2 هي

$$\{\lambda^{(2)}\} = \{5,-5\}$$

$$\{u^{(2)}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

وبالتالي فإن المصفوفة A لها القيم الذاتية

$$\{\lambda(A)\} = \{1,1,10,5,-5\}$$

والمتجهات الذاتية

$$\{u(A)\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

---

(٧) المصفوفة A تُسمى بالمصفوفة القياسية *Normal Matrix* وذلك إذا كانت $AA^{*T} = A^{*T}A$. إثبت أن مثل هذه المصفوفة شبه سهلة . كذلك أثبت أن

$$\text{(i)} \quad \lambda\left(AA^{*T}\right) = |\lambda(A)|^2$$

$$\text{(ii)} \quad \lambda\left(A + A^{*T}\right) = \lambda(A) + \lambda^*(A)$$

حيث $\lambda(\cdots)$ هي القيم الذاتية لما بين القوسين .

الإثبات :

أ ـــ <u>إثبات أن A شبه سهلة :</u> دع $B = AA^{*T}$ ، إذن

$$B^{*T} = \left(AA^{*T}\right)^{*T} = AA^{*T} = B$$

إذن المصفوفة $B = AA^{*T}$ مصفوفة هيرميتية وبالتالي فهي شبه سهلة .. أي يمكـــن جعلهـــا قطريـــة بالتحويلة المتماثلة $T^{-1}BT = D_\lambda$ (أنظر الفصل القادم لفهم معنى " القطرية ") .

ب ــ ولإثبات الجزء الثاني من السؤال :

حيث أن المصفوفتين A, A^{*T} إبداليتان ، إذن لهما نفس مجموعة المتجهات الذاتية (أنظر تمرين محلول ٤ في نفس هذا الفصل) . كذلك A, A^{*T} لهما نفس القيم الذاتية . ومن ثم إذا كانت A لها (λ, u) فإن A^* لها (λ^*, u^*) . لنفرض أن A لها (λ, u) ، إذن

$$Au = \lambda u \quad \Rightarrow \quad A^{*T}Au = \lambda A^{*T}u \quad \Rightarrow \quad \left(A^{*T}A\right)u = \lambda\lambda^* u = |\lambda|^2 u$$

وبالتالي فإن المصفوفة $A^{*T}A$ يكون لها القيم الذاتية $|\lambda(A)|^2$.

كذلك د ع

$$Au = \lambda u \quad \Rightarrow \quad A^{*T}u = \lambda^* u \quad \Rightarrow \quad \left(A + A^{*T}\right)u = \left(\lambda + \lambda^*\right)u$$

وبالتالي فإن المصفوفة $\left(A + A^{*T}\right)$ لها $\left(\lambda(A) + \lambda^*(A), u\right)$.

٣-٦ الاستقطار - المصفوفات القابلة لأن تكون قطرية

DIAGONALIZATION - DIAGONALIZABLE MATRICES

يُطلق على المصفوفة T التي تحتوي على المتجهات الذاتية للمصفوفة A بـــ **المصفوفة الظاهرية** ***Modal Matrix*** والعلاقة الآتية دائماً سليمة لأي مصفوفة مربعة A لها (λ, u) :

$$AT = TD_\lambda$$

حيث D_λ مصفوفة قطرية عناصر قطرها هي القيم الذاتية للمصفوفة A وبنفس ترتيب وضع المتجهات الذاتية للمصفوفة A في المصفوفة T كأعمدة .

٣-٦-١ المتجهات الذاتية المستقلة *Independent Eigenvectors* :

إذا كانت المتجهات الذاتية لـــ A مستقلة فإن

$$\rho(T) = n$$

ويكون T^{-1} موجود ، وبالتالي يكون

$$\boxed{T^{-1}AT = D_\lambda}$$

هذه الصيغة الأخيرة تُسمى بـ **القطرية** ***Diagonalization*** أو تُسمى أحياناً بـ **التحويلة التماثلية** ***Similarity Transformation*** . وتُسمى المصفوفة A في هذه الحالة بالمصفوفة **القابلة للقطرية** ***Diagonalizable*** أو بالمصفوفة **شبه السهلة** ***Semi-Simple*** وأحياناً **سهلة** ***Simple*** فقط . ويُقال أن A **متماثلة** (أو **مُشابهة**) ***Similar to*** مع D_λ .

مثال : إجعل المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ قطرية .

الحل :

القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 3$$

ومتجهاتها الذاتية هي

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(لاحظ أن المتجهات الذاتية مستقلة لأن القيم الذاتية متميزة) . وبالتالي فإن المصفوفة الظاهرية T للمصفوفة A هي

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

ومنها

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

وتكون القطرية كالتالي

$$T^{-1}AT=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&-1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&0\\0&1&1\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&1\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=D_\lambda$$

حالة هامة : حالة المصفوفات المتماثلة الحقيقية أو الهرميتية :

في هذه الحالة فإنه من الممكن دائماً أن تُوجد مصفوفة ظاهرية $\tilde{T}$ بحيث :

$$\tilde{T}^{-1}=\tilde{T}^{*T}$$

أي تكون $\tilde{T}$ مصفوفة وحدوية *Unitar Matrix* . ويُسمى التحويل في هذه الحالة **تحويل مؤتلف** ***Congruent Transformation*** أو **التحويل الوحدوي** ***Unitary Transformation*** .

مثال : إجعل المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&-1&0\\0&0&\sqrt{5}\end{bmatrix}$ قطرية .

الحل :

القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\lambda_1=\sqrt{5}\quad,\quad\lambda_2=\sqrt{5}\quad,\quad\lambda_3=-\sqrt{5}$$

ومتجهاتها الذاتية هي

$$u_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad,\quad u_2=\begin{bmatrix}1+\sqrt{5}\\2\\0\end{bmatrix}\quad,\quad u_3=\begin{bmatrix}1-\sqrt{5}\\2\\0\end{bmatrix}$$

لاحظ أن المتجهات الذاتية مستقلة (لأن $\langle u_i,u_j\rangle=0\,,\forall i\neq j$) . وبالتالي فإن المصفوفة الظاهرية $\tilde{T}$ للمصفوفة A هي

$$\tilde{T}=\begin{bmatrix}0&(1+\sqrt{5})/\|u_2\|&(1-\sqrt{5})/\|u_3\|\\0&2/\|u_2\|&2/\|u_3\|\\1&0&0\end{bmatrix}$$

ومنها

$$\widetilde{T}^{-1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (1+\sqrt{5})/\|u_2\| & 2/\|u_2\| & 0 \\ (1-\sqrt{5})/\|u_3\| & 2/\|u_3\| & 0 \end{bmatrix}$$

وتكون القطرية كالتالي

$$\widetilde{T}^{-1}A\widetilde{T}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ (1+\sqrt{5})/\|u_2\| & 2/\|u_2\| & 0 \\ (1-\sqrt{5})/\|u_3\| & 2/\|u_3\| & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & (1+\sqrt{5})/\|u_2\| & (1-\sqrt{5})/\|u_3\| \\ 0 & 2/\|u_2\| & 2/\|u_3\| \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$=\begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{5} \end{bmatrix}=D_\lambda$$

وعلى القارئ التأكد بنفسه من صحة هذه الحسابات .

مثال : أوجد المصفوفة المماثلة (المُشابهة) للمصفوفة $A=\begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

الحل :

القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\lambda_1=1 \quad , \quad \lambda_2=1 \quad , \quad \lambda_3=10$$

ومتجهاتها الذاتية هي

$$u_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_3=\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

لاحظ أن المتجهات الذاتية مستقلة (لأن $\langle u_i,u_j\rangle=0\,,\forall i\neq j$) . ونستطيع أن نحصل (من u_1,u_2,u_3) على متجهات متعامدة باستعمال طريقة جرام ـــ شميدت Gram - Schmidt السابق ذكرها في الباب الأول :

$$\widetilde{u}_1=u_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\widetilde{u}_1\|^2=5$$

$$\widetilde{u}_2 = u_2 + c\widetilde{u}_1 \quad , \quad c = \frac{-\langle u_2, \widetilde{u} \rangle}{\|\widetilde{u}_1\|^2} = -\frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{u}_3 = u_3$$

ثم بجعلها جميعاً ذات مقياس الوحدة *Normalized* :

$$\widetilde{u}_{1n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{u}_{2n} = \begin{bmatrix} 4/\sqrt{45} \\ -2/\sqrt{45} \\ 5/\sqrt{45} \end{bmatrix} \quad , \quad \widetilde{u}_{3n} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون المصفوفة الظاهرية

$$\widetilde{T} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix}$$

ومنها

$$\widetilde{T}^{-1} = \widetilde{T}^{T} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 4/\sqrt{45} & -2/\sqrt{45} & 5/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

وتكون القطرية كالتالي

$$\widetilde{T}^{-1}A\widetilde{T} = \widetilde{T}^{T}A\widetilde{T}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 4/\sqrt{45} & -2/\sqrt{45} & 5/\sqrt{45} \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & -2/3 \\ 2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} = D_\lambda$$

لاحظ أن أهمية حساب $\widetilde{T}$ من T هي كون $\widetilde{T}^{-1}$ أسهل بكثير من T^{-1} ، كما يجب أن نلاحظ أن $T^{T}AT \neq D_\lambda$ بينما يكون $T^{-1}AT = D_\lambda$. كما يجب ملاحظة أنه إذا كان u متجه ذاتي مصاحب للقيمة الذاتية λ ، فإن $\widetilde{u}$ كذلك متجه ذاتي مصاحب لنفس القيمة الذاتية λ .

٣-٦-٢ المتجهات الذاتية المعتمدة بعضها على بعض (غير مستقلة)

Dependent Eigenvectors

في هذه الحالة لا يمكن جعل A قطرية بشكلٍ مباشرٍ .. ولكن من الممكن وصف ما يُسمى بـ **المتجهات المُعممة** ***Generalized Vectors*** و **شكل جوردان** ***Jordan Form*** المتكون من **قوالب جوردان** ***Jordan Blocks*** للوصول إلى الصورة

$$A\tilde{T} = \tilde{T}J$$

أو

$$\tilde{T}^{-1}A\tilde{T} = J$$

حيث J مصفوفة قريبة من القطرية وليست قطرية . وبشكلٍ عامٍ ، يُطلق على A في هذه الحالة مصفوفة **غير شبه سهلة** ***Non-Semi-Simple*** أو ببساطة أكثر **غير سهلة** ***Non-Simple*** .

٣-٧ شكل جوردان *JORDAN FORM*

في حالة المصفوفات **غير شبه السهلة** ***Non-Semi-Simple*** (أي المصفوفات التي لا يمكن تحويلها إلى الشكل $T^{-1}AT = D_\lambda$ أو التي لا يمكن حساب T^{-1} لها بسبب وجود إعتماد بين متجهاتها الذاتية ومن ثم فهي تحقق فقط العلاقة $AT = TD_\lambda$) ، هذه المصفوفات يمكن تحويلها إلى شكل قريب من القطرية (يُسمى بـ **شكل جوردان** ***Jordan From***) بحيث $\tilde{T}^{-1}A\tilde{T} = J$ ، حيث $\tilde{T}$ في هذه الحالة تحتوي على ما يُسمى بـ **المتجهات الذاتية المُعممة** ***Generalized Eigenvectors*** .

والآن نشرع في الحسابات من بداية المشكلة ، حيث يكون لدينا مصفوفة مربعة لها قيم ذاتية بعضها ذات تكرارية *Multiplicity* وعند حساب المتجهات الذاتية لهذه القيم الذاتية وجدنا أن هناك إعتمادية في مجموعة المتجهات الذاتية لإحدى هذه القيم الذاتية التي لها تكرارية .

نفرض أن لدينا مصفوفة A لها قيمة ذاتية واحدة λ ذات تكرارية m في حين أن بقية القيم الذاتية متميزة .. أي نفرض أن المصفوفة A لها القيم الذاتية :

$$\left\{\lambda^{(m)}, \lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \cdots\cdots, \lambda_n\right\}$$

حيث

$$\lambda_{m+i} \neq \lambda_{m+j} \quad , \quad \forall\, i \neq j$$

و $\lambda^{(m)}$ هي القيمة الذاتية والتي لها تكرارية m . ولتكن

$$\{u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \cdots\cdots, u_n\}$$

هي المتجهات الذاتية لـــ A . في هذه الحالة نجد أن المجموعة الفرعيـــة $\{u_{m+1}, u_{m+2}, \cdots\cdots, u_n\}$ مـــن المتجهات الذاتية مستقلة بينما المجموعة $\{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$ غير مستقلة بعضها عن بعض .. بتعبير آخر

$$\rho\{u_1, u_2, \cdots, u_m\} < m$$
$$\rho\{u_{m+1}, u_{m+2}, \cdots\cdots, u_n\} = n - m$$

ومن ثم تكون المصفوفة الظاهرية

$$T = [u_1 \mid u_2 \mid \cdots \mid u_m \mid u_{m+1} \mid u_{m+2} \mid \cdots\cdots \mid u_n]$$

مصفوفة شاذة وبالتالي فإن T^{-1} غير موجودة ولا يمكن تنفيذ القطرية . ويُقال هنـــا أن A **لا يمكـــن جـــعـــلـــهـــا قطرية** ***Non-Diagonalizable*** .

عارض ١ : *Proposition 1* :

إذا حققت المتجهات $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots\cdots, \tilde{u}_m$ **أن**

$$(A - \lambda I)\tilde{u}_1 = 0 \quad , \quad (A - \lambda I)\tilde{u}_i = \tilde{u}_{i-1} \quad , \quad \forall\, i = 2,3,\cdots,m$$

فإن المتجهات $\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_m\}$ **تكون مستقلة .**

الإثبات :

دع $c_1\tilde{u}_1 + c_2\tilde{u}_2 + \cdots\cdots + c_m\tilde{u}_m = 0$ هي التركيبة الخطيـــة *Linear Combination* والمطلـــوب اختبارها للإستقلالية (الإستقلالية تتحقق عندما يكون الحل الوحيد هو $c_i = 0$ وذلك لجميع قيم i) .

بضرب التركيبة الخطية في $(A - \lambda I)$:

$$c_1\underbrace{(A - \lambda I)\tilde{u}_1}_{=0} + c_2\underbrace{(A - \lambda I)\tilde{u}_2}_{=u_1} + \cdots\cdots + c_m\underbrace{(A - \lambda I)\tilde{u}_m}_{=u_{m-1}} = 0$$

أي أن

$$c_2\tilde{u}_1 + c_3\tilde{u}_2 \cdots\cdots + c_m\tilde{u}_{m-1} = 0$$

وبالضرب مرةً أخرى في $(A-\lambda I)$:

$$c_2\underbrace{(A-\lambda I)\tilde{u}_1}_{=0}+c_3\underbrace{(A-\lambda I)\tilde{u}_2}_{=u_1}+\cdots\cdots+c_m\underbrace{(A-\lambda I)\tilde{u}_{m-1}}_{=u_{m-2}}=0$$

أي أن

$$c_3\tilde{u}_1+c_4\tilde{u}_2+\cdots\cdots+c_m\tilde{u}_{m-2}=0$$

وبالضرب مرةً ثالثة في $(A-\lambda I)$:

$$c_3\underbrace{(A-\lambda I)\tilde{u}_1}_{=0}+c_4\underbrace{(A-\lambda I)\tilde{u}_2}_{=u_1}+\cdots\cdots+c_m\underbrace{(A-\lambda I)\tilde{u}_{m-2}}_{=u_{m-3}}=0$$

أي أن

$$c_4\tilde{u}_1+c_5\tilde{u}_2+\cdots\cdots+c_m\tilde{u}_{m-3}=0$$

وباستمرار عملية الضرب في $(A-\lambda I)$ عدداً من المرات قدره $(m-1)$ نكون قد وصلنا إلى :

$$\begin{aligned}
&c_2\tilde{u}_1+c_3\tilde{u}_2+c_4\tilde{u}_3+\cdots\cdots+c_{m-1}\tilde{u}_{m-2}+c_m\tilde{u}_{m-2}=0 &&(1)\\
&c_3\tilde{u}_1+c_4\tilde{u}_2+\cdots\cdots+c_{m-1}\tilde{u}_{m-3}+c_m\tilde{u}_{m-2}=0 &&(2)\\
&c_4\tilde{u}_1+\cdots\cdots+c_{m-1}\tilde{u}_{m-4}+c_m\tilde{u}_{m-3}=0 &&(3)\\
&\vdots &&\vdots\\
&c_{m-1}\tilde{u}_1+c_m\tilde{u}_2=0 &&(m-2)\\
&c_m\tilde{u}_1=0 &&(m-1)
\end{aligned}$$

من المعادلة $(m-1)$ نستنتج أن $c_m=0$ ، ثم من المعادلة $(m-2)$ نستنتج أن $c_{m-1}=0$ .. وهكـــذا .. ثم من المعادلة (2) نستنتج أن $c_3=0$ ، ثم من المعادلة (1) نستنتج أن $c_2=0$. وأخـــيراً مـــن المعادلة الأصلية نستنتج أن $c_1=0$. وبالتالي فإن التركيبة الخطية

$$c_1\tilde{u}_1+c_2\tilde{u}_2+\cdots\cdots+c_m\tilde{u}_m=0$$

لا تتحقق إلا في الحالة التي فيها

$$c_1=c_2=\cdots\cdots=c_m=0$$

أي أن المتجهات $\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots\cdots,\tilde{u}_m\}$ تكون مستقلة وذلك إذا حققت الآتي :

$$\boxed{(A-\lambda I)\tilde{u}_1=0\quad,\quad (A-\lambda I)\tilde{u}_i=\tilde{u}_{i-1}\quad,\quad \forall\, i=2,3,\cdots,m}$$

عارض ٢ :

... لها القيمة الذاتية λ والتي لها التكرارية m بحيث يكون

$$\rho(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_m) = 1$$

حيث $(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_m)$ هي المتجهات الذاتية للقيمة الذاتية λ ، فإن المتجهات المُعمَّمة *Generalized (Principal) Eigenvectors* يمكن الحصول عليها كالآتي :

$$\begin{aligned}
&A u_1 = \lambda u_1, \widetilde{u}_1 = u_1 \\
&A\widetilde{u}_2 = \lambda \widetilde{u}_2 + \widetilde{u}_1 \\
&A\widetilde{u}_3 = \lambda \widetilde{u}_3 + \widetilde{u}_2 \\
&\vdots \\
&A\widetilde{u}_m = \lambda \widetilde{u}_m + \widetilde{u}_{m-1}
\end{aligned}$$

وتكون المتجهات $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \cdots\cdots, \widetilde{u}_m)$ مستقلة .

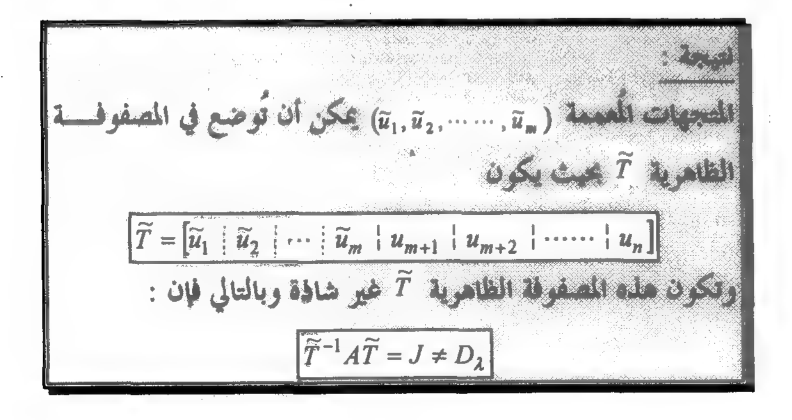
الإثبات :

بالنظر إلى شرط وجود المتجهات المُعمَّمة نجد أنها تُحقق الآتي :

$$(A - \lambda I)\widetilde{u}_1 = 0 \quad , \quad (A - \lambda I)\widetilde{u}_i = \widetilde{u}_{i-1} \quad , \quad \forall\, i = 2,3,\cdots, m$$

وباستخدام نتائج العارض ١ ، فإن المتجهات $(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_m)$ تكون مستقلة .

من النتائج التي خلصنا إليها من العارضين ١ و ٢ نصل إلى النتيجة الهامة الآتية :



نتيجة :

المتجهات المُعممة $(\widetilde{u}_1, \widetilde{u}_2, \cdots\cdots, \widetilde{u}_m)$ يمكن أن تُوضع في المصفوفة الظاهرية $\widetilde{T}$ بحيث يكون

$$\widetilde{T} = [\widetilde{u}_1 \mid \widetilde{u}_2 \mid \cdots \mid \widetilde{u}_m \mid u_{m+1} \mid u_{m+2} \mid \cdots\cdots \mid u_n]$$

وتكون هذه المصفوفة الظاهرية $\widetilde{T}$ غير شاذة وبالتالي فإن :

$$\widetilde{T}^{-1} A \widetilde{T} = J \neq D_\lambda$$

والصورة التي عليها J تكون قريبة من الصورة القطرية وتُسمى بشكل جوردان **Jordan Form** . وتأخذ المصفوفة J الصورة العامة التالية :

$$J=\left[\begin{array}{cccccc|cccc}\lambda & \delta & \cdots & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \lambda & \delta & \cdots & 0 & 0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots & & O & & \\ \vdots & & & \ddots & \delta & 0 & & & & \\ 0 & & & & \lambda & \delta & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda & & & & \\ \hline & & & & & & \lambda_{m+1} & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & & & 0 & \lambda_{m+1} & \cdots & 0 \\ & & O & & & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n\end{array}\right]$$

حيث تأخذ δ القيمة (0) أو القيمة (١) .

ملاحظات هامة :

* إذا كان هناك تكرارية جبرية في القيمة الذاتية λ بمقدار m وكان

$$\rho(u_1,u_2,\cdots\cdots,u_m)=1$$

فإن هذه القيمة الذاتية تظهر في قالب جوردان واحد *Jordan Block* كالآتي :

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda\end{bmatrix}_{m\times m}$$

وتُسمى المصفوفة A في هذه الحالة بالمصفوفة غير المنحلة (*Non-Degenerate* أو *Non-Derogatory*) .

* أما إذا كانت

$$m=\rho(u_1,u_2,\cdots\cdots,u_m)=r>1$$

فإن نفس القيمة الذاتية λ تظهر في r من قوالب جوردان ؛ كل قالب له الأبعاد $m_j \times m_j$ بحيث يكون $\sum_{j=1}^{r} m_j = m$ وكل قالب له صورة عامة كالآتي :

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda & \delta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \delta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{m_j \times m_j}$$

تمرينات محلولة على الفصل (٣-٧)

(١) أوجد المصفوفة الظاهرية T بحيث يكون $T^{-1}AT = J$ حيث $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل :

القيم الذاتية لـــ A هي

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 4 \quad , \quad \lambda_3 = -2$$

والمتجهات الذاتية هي

$$u_1 = u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن المتجهات المُعممة تكون

- $\tilde{u}_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $(A - 4I)\tilde{u}_2 = \tilde{u}_1 \quad \Rightarrow \quad (A - 4I)^2 \tilde{u}_2 = O \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

وبالتالي تكون T كالآتي

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ويكون

$$J = \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

لاحظ أن هذا يعني أن $T^{-1}AT = J$.

---

(٢) أوجد T, J للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل :

القيم الذاتية لـــ A هي

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

والمتجهات الذاتية هي

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

وسنصف في هذا المثال كيفية التصرف في مثل هذه الحالة .

دع $\tilde{u}_1$ تركيبة خطية من u_1, u_2 .. أي خذ

$$\tilde{u}_1 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + 2\beta \end{bmatrix}$$

ثم **أوجد** $\tilde{u}_2$ كما سبق

$$(A - 4I)\tilde{u}_2 = \tilde{u}_1 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + 2\beta \end{bmatrix}$$

والتي يمكن حلّها كالآتي:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & \alpha \\ -1 & -2 & 1 & \beta \\ -1 & -2 & 1 & \alpha+2\beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \alpha+\beta \\ 0 & 0 & 0 & 2(\alpha+\beta) \end{array}\right]$$

وبالتالي هناك حل لهذا النظم عند $\alpha+\beta=0$؛ أي عنـــد $\beta=-\alpha$ ويكـــون $q_1+2q_2-q_3=\alpha$ ، وبالتالي أحد الحلول يكون

$$\tilde{u}_2=\begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبأخذ $\alpha=1$:

$$\tilde{u}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ثم خذ

$$\tilde{u}_3=au_1+bu_2$$ ،

بحيث يكون مستقل عن $\tilde{u}_1$ (وليكن $\tilde{u}_3=u_1$) ، إذن

$$\tilde{u}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي تكون T كالآتي

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ويكون

$$T^{-1}AT=J=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

وهذا المثال يُعطي كيفية التصرف في حالة وجود متجهين مستقلين لتكرارية (حالة إنحلال) .

(٣) إذا كانت المصفوفة Q مربعة من رتبة n ولها القيم الذاتية المتميزة $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ و $p \le n$.
فإذا كان $T^{-1}QT = J$ ، **أثبت أن** $T^{-1}Q^kT = J^k$.

الإثبات :

المصفوفة المربعة Q يمكن وضعها على شكل جوردان كالآتي :

$$T^{-1}QT = J$$

أي أن

$$Q = TJT^{-1}$$

ومن ثم

$$Q^k = \underbrace{QQ\cdots\cdots Q}_{ktimes} = \underbrace{(TJT^{-1})(TJT^{-1})\cdots\cdots(TJT^{-1})}_{ktimes} = \underbrace{TJ\underbrace{T^{-1}T}_{=I}JT^{-1}\cdots\cdots TJ\underbrace{T^{-1}T}_{=I}JT^{-1}}_{ktimes}$$

$$= T\underbrace{JJ\cdots\cdots J}_{ktimes}T^{-1} = TJ^kT^{-1}$$

أي $T^{-1}Q^kT = J^k$.

---

(٤) إذا كانت المصفوفة Q مربعة من رتبة n ولها القيم الذاتية المتميزة $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ و $p \le n$.
أثبت أن $\lim_{k\to\infty} Q^k = 0$ **إذا وفقط إذا كان**

$$|\lambda_j| < 1 \quad , \quad \forall\ j = 1,2,\cdots,p$$

الإثبات :

المصفوفة المربعة Q يمكن وضعها على شكل جوردان كالآتي :

$$T^{-1}QT = J$$

ومن المثال السابق يكون $T^{-1}Q^kT = J^k$ ، أو $Q^k = TJ^kT^{-1}$

ولكن J مصفوفة مثلثية عليا وكذلك J^k التي يكون قطرها الرئيسي هو القيم الذاتية $\{\lambda_i\}$ مرفوعة للقوة k ، بينما تكون عناصرها الأخرى من القيم الذاتية أيضاً مرفوعة لقوى أقل من k . وبالتالي يكون

$$\lim_{k\to\infty} J^k = 0$$

إذا وفقط إذا كانت كل القيم الذاتية محققة لـــ $|\lambda_j| < 1$ لجميع قيم $j = 1,2,\cdots,p$ .. وهذا يُثبت المطلوب .

ملحوظة :

هذا المثال يُفيد في إثبات تقارب الطرق التكرارية لحل المعادلات الخطية كما سبق أن بيناه في الباب الثاني .

٣-٨ مسائل على الباب الثالث

(١) إثبت أن القيم الذاتية للمصفوفة **المترقية للصفر** *Nilepotent* $(A^n = O)$ أصفار .

(٢) إحسب القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لـــ

$$6\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} + 18\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix} + 6I_3$$

(٣) إحسب الشرط على المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ليكون لها (1) كقيمة ذاتية .

(٤) إثبت أن A, A^T يكون لهما متجهات ذاتية متعامدة بالتبادل *Biorthogonal* .

(٥) إذا كان $A = P^{-1}BP$ ، فأثبت أن القيم الذاتية لـ A تكون متطابقة مع القيم الذاتية لـــ B ، ثم أوجد العلاقة بين متجهاتهما الذاتية .

(٦) إثبت الآتي للمعادلة الذاتية :

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots\cdots + a_n\lambda^n$$

حيث

(i) $a_0 = |A|$ ، (ii) $a_n = (-1)^n$ ، (iii) $a_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(A)$

(٧) إذا كانت A مصفوفة متماثلة وكان x أحد المتجهات الذاتية لمصفوفة مربعة A ، فأثبت أن $\left(A - cxx^T\right)$ يكون لها نفس المتجهات الذاتية لـ A (حيث c كمية مقياسية) ، ثم أوجد العلاقة بين القيم الذاتية .

(٨) إثبت أن القيم الذاتية للمصفوفة المتوحدة *Orthonormal* تكون عددياً الوحدة .

(٩) إثبت أنه إذا كان

$$(A - \lambda I)\tilde{u}_1 = 0 \qquad , \qquad (A - \lambda I)\tilde{u}_m = \tilde{u}_{m-1}$$

فإن

$$(A - \lambda I)^m \tilde{u}_m = 0$$

(١٠) إثبت إذا كانت A حقيقية وتُحقق : $A^T M = MA$ ، حيث M مصفوفة موجبة تحديداً (أي أن $x^{*T} Mx > 0$ لأي $x \in \mathbb{C}^n$ ولا يساوي الصفر) . أثبت أن $\lambda(A)$ كميات حقيقية .

(١١) إثبت أن : $tr\left(A^p\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p$.

(١٢) صمم مصفوفة A بحيث يكون لها قيم ذاتية مصاحبة 4 , 2 , 1- ومتجهات ذاتية $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ على الترتيب .

الباب الرابع

دوال المصفوفات
MATRIX FUNCTIONS

٤-١ مقدمة :

يطرح هذا الباب إجابة عن سؤالٍ هامٍ وهو " ماذا عن دوال المصفوفات $f(A)$ ؟ كيف نحسب e^A ، $\sin A$ ، $\cos A$ ، .. ؟ وهل لهذه الدوال وجود وهل نستطيع حسابها أم لا ؟ . ولكن هل لهذه الإجابة أهمية ؟ .. نعم هناك أهمية كبيرة للإجابة على هذا السؤال .. فهي تؤدي بنا إلى تطبيق نظرية المصفوفات في حل مشاكل رياضية كثيرة مثل المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية وغيرها .

دع

$$f(\lambda) = f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + \cdots\cdots \qquad \text{(a)}$$

دالة مقياسية في λ بحيث تكون متقاربة *Convergent* إذا كان $|\lambda| < R$ حيث $R \in \mathbb{R}$. ودعنا ندعي وجود الدالة المصفوفية $f(A)$ على هذا النسق ؛ أي

$$f(A) = f_0 I + f_1 A + f_2 A^2 + \cdots\cdots \qquad \text{(b)}$$

وبافتراض أن القيم الذاتية للمصفوفة المربعة متميزة (إفتراض لا يُخصص المسألة) ، فإننا ، ومن الباب السابق ، قد علمنا أن $T^{-1}AT = D_\lambda$ وأن $T^{-1}A^kT = D_{\lambda^k}$ ، وبالتالي بضرب الصيغة (b) في T^{-1} من اليسار و T من اليمين :

$$T^{-1}f(A)T = f_0 I + f_1 T^{-1}AT + f_2 T^{-1}A^2T + \cdots\cdots = f_0 I + f_1 D_\lambda + f_2 D_{\lambda^2} + \cdots\cdots$$

وبالتالي فإن

$$f(A) = T\left(f_0 I + f_1 D_\lambda + f_2 D_{\lambda^2} + \cdots\cdots\right)T^{-1} \qquad \text{(c)}$$

$f(A)$ تتقارب إذا كانت المصفوفة القطرية بين القوسين في (c) متقاربة .. ولكننا إذا نظرنـــا إلى عناصر القطر فإننا نراه مساوياً لـــ $f(\lambda_i)$ وذلك إذا كان $R > |\lambda_i|$ ، وبالتالي فإننا نصـــل إلى نتيجة هامة وهي أن $f(A)$ موجودة إذا كان هنـــاك شـــرط علـــى القيـــم الذاتيـــة لـــ A وأن $f(A) = TD_{f(\lambda)}T^{-1}$.

يمكننا الآن اعتبار أن الدالة المصفوفة بشكلٍ عامٍ هي

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i A^i \quad , \because \quad A^0 = I$$

إذا كان

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \lambda^i$$

ومن الممكن إثبات أن هذه التعريف لا يزال صالحاً في حالة وجود تكرارية في القيم الذاتية لـــــ A حيث سيكون في هذه الحالة $T^{-1}AT = J$ حيث J شكل جوردان ويكون $T^{-1}A^kT = J^k$ ، وبالتالي

$$f(A) = T\left(f_0 I + f_1 J + f_2 J^2 + f_3 J^3 + \cdots\cdots\right)T^{-1}$$

وتكون المصفوفة بين القوسين مصفوفة مثلثية عليا (لماذا ؟) وتكون أكبر قوى للقيم الذاتية في القطر الرئيسي الذي يكون محتوياً على $f(\lambda_i)$ التي تتقارب عندما $R > |\lambda_i|$.

كيف يمكننا الآن حساب $f(A)$ .. مثـــلاً e^A ، $\sin A$ ، $\cos A$ ، $\ln(I + A)$ ، .. إلخ .

هناك عدة طرق نستطيع بها أداء هذا الحساب نستعرضها كما يلي :

٤-٢ باستخدام الاستقطار (A شبه سهلة)

USING DIAGONALIZATION (A is semi-simple)

من التعريف السابق للدالة $f(A)$ وصلنا إلى الآتي :

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i A^i \quad , \quad f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} f_i \lambda^i$$

وأن

$$\boxed{f(A) = TD_{f(\lambda)}T^{-1}}$$

بشرط وجود $f(\lambda)$.

حالة خاصة :

إذا كانت المصفوفة A قطرية :

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, \cdots\cdots, a_{nn})$$

فإن

$$f(A) = diag(f(a_{11}), f(a_{22}), \cdots\cdots, f(a_{nn}))$$

الإثبات :

حيث أن A قطرية ، إذن $\lambda_i = a_{ii}$ و $T = I$. أي أن

$$f(A) = ID_{f(a_{ii})}I = diag(f(a_{11}), f(a_{22}), \cdots\cdots, f(a_{nn}))$$

فمثلاً إذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فإن :

$$\sin A = \begin{bmatrix} \sin 5 & 0 & 0 \\ 0 & \sin 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sin 2 \end{bmatrix} \quad , \quad e^A = \begin{bmatrix} e^5 & 0 & 0 \\ 0 & e^3 & 0 \\ 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix}$$

وهكذا .

مثال : أوجد e^A حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

الحل :

القيم الذاتية للمصفوفة A هي

$$\lambda_1 = 5 \quad , \quad \lambda_2 = 4 \quad , \quad \lambda_3 = -2$$

والمتجهات الذاتية هي

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$T=\begin{bmatrix}0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\quad,\quad T^{-1}=T^{T}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0\\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0\end{bmatrix}$$

أي أن هناك تحويلة وحداوية (لماذا ؟) بحيث يكون

$$T^{T}AT=D_{\lambda}=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$e^{A}=T\begin{bmatrix}e^{5} & 0 & 0\\ 0 & e^{4} & 0\\ 0 & 0 & e^{-2}\end{bmatrix}T^{T}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}e^{4}+e^{-2} & e^{4}-e^{-2} & 0\\ e^{4}-e^{-2} & e^{4}+e^{-2} & 0\\ 0 & 0 & 2e^{5}\end{bmatrix}$$

تمرينات محلولة :

(١) إثبت أنه إذا كانت A مصفوفة متماثلة ، فإن $f(A)$ تكون متماثلة .

الحل :

حيث أن A مصفوفة متماثلة ، إذن هناك مصفوفة T بحيث يكون $T^{-1}=T^{T}$ و $A=TD_{\lambda}T^{T}$ ،

وبالتالي : $f(A)=TD_{f(\lambda)}T^{T}$

ومنها

$$\left(f(A)\right)^{T}=\left(TD_{f(\lambda)}T^{T}\right)^{T}=TD_{f(\lambda)}T^{T}=f(A)$$

أي أن $f(A)$ تكون متماثلة .

---

(٢) إثبت أن $\sin^{2}A+\cos^{2}A=I$.

الإثبات :

$$\sin A=TD_{\sin\lambda}T^{-1}\quad\Rightarrow\quad\sin^{2}A=TD_{\sin^{2}\lambda}T^{-1}$$

$$\cos A=TD_{\cos\lambda}T^{-1}\quad\Rightarrow\quad\cos^{2}A=TD_{\cos^{2}\lambda}T^{-1}$$

وبالتالي فإن

$$\sin^2 A + \cos^2 A = T\left(D_{\sin^2\lambda} + D_{\cos^2\lambda}\right)T^{-1} = TD_{\underbrace{\sin^2\lambda + \cos^2\lambda}_{=1}}T^{-1} = TIT^{-1} = TT^{-1} = I$$

---

(٣) إثبت أن $\sin(-A) = -\sin A$.

الإثبات :

$$\sin A = TD_{\sin\lambda}T^{-1}$$

ولكن إذا كان $Ax = \lambda x$ فإن

$$(-A)x = (-\lambda)x$$

أي إذا كانت A لها (λ, x) فإن لـــ $(-A)$ $(-\lambda, x)$. ومن ثم :

$$\sin(-A) = TD_{\sin(-\lambda)}T^{-1} = TD_{-\sin(\lambda)}T^{-1} = -\sin A$$

---

(٤) إثبت أن $e^A.e^{-A} = I$.

الإثبات :

$$e^A = TD_{e^\lambda}T^{-1} \quad , \quad e^{-A} = TD_{e^{-\lambda}}T^{-1}$$

وبالتالي

$$e^A.e^{-A} = TD_{e^\lambda}\underbrace{T^{-1}T}_{=I}D_{e^{-\lambda}}T^{-1} = TD_{e^\lambda}D_{e^{-\lambda}}T^{-1} = TD_{e^0}T^{-1} = TIT^{-1} = TT^{-1} = I$$

---

(٥) إثبت أنه إذا كان لـــ A (λ, x) ، فإن (At) يكون لها $(\lambda t, x)$ حيث t كمية مقياسية .

الإثبات :

A لها (λ, x) ، إذن $Ax = \lambda x$ وبالضرب في t :

$$(tA)x = (t\lambda)x \quad \Rightarrow \quad (At)x = (\lambda t)x$$

أي أن (At) يكون لها $(\lambda t, x)$.

---

(٦) إثبت أن : $e^{At} = TD_{e^{(\lambda t)}}T^{-1}$

الإثبات :

A لها (λ, x) ، إذن (At) يكون لها $(\lambda t, x)$ وذلك من التمرين السابق . وبالتالي :

$$e^{At} = TD_{e^{(\lambda t)}}T^{-1}$$

---

(٧) إثبت أن : $\left(e^{A}\right)^{-1} = e^{-A}$

الإثبات : $e^{A} = TD_{e^{\lambda}}T^{-1} \Rightarrow e^{(-A)} = TD_{e^{(-\lambda)}}T^{-1}$

وأيضاً

$$e^{A} = TD_{e^{\lambda}}T^{-1} \Rightarrow \left(e^{A}\right)^{-1} = \left(TD_{e^{\lambda}}T^{-1}\right)^{-1} = TD_{\left(e^{\lambda}\right)^{-1}}T^{-1} = TD_{e^{(-\lambda)}}T^{-1}$$

إذن $$\left(e^{A}\right)^{-1} = e^{-A}$$

---

(٨) إثبت أن : $\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$.

الإثبات : $e^{A} = TD_{e^{\lambda}}T^{-1} \Rightarrow e^{At} = TD_{e^{\lambda t}}T^{-1} \Rightarrow e^{-At} = TD_{e^{-\lambda t}}T^{-1}$

وأيضاً

$$e^{A} = TD_{e^{\lambda}}T^{-1} \Rightarrow \left(e^{At}\right)^{-1} = TD_{\left(e^{\lambda t}\right)^{-1}}T^{-1} = TD_{e^{-\lambda t}}T^{-1}$$

إذن $$\left(e^{At}\right)^{-1} = e^{-At}$$

لاحظ أن التمارين (7) و (8) أدت إلى نتائج هامة .. فمثلاً إذا رجعنا للمصفوفة A المعطاة في آخر مثال (المثال السابق للتمارين المحلولة) ، كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ومنها وجدنا أن :

$$e^{A} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{4} + e^{-2} & e^{4} - e^{-2} & 0 \\ e^{4} - e^{-2} & e^{4} + e^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{5} \end{bmatrix}$$

وبالتالي :
$$e^{-A}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-4}+e^{2} & e^{-4}-e^{2} & 0 \\ e^{-4}-e^{2} & e^{-4}+e^{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{-5} \end{bmatrix}$$

كذلك :
$$e^{At}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{4t}+e^{-2t} & e^{4t}-e^{-2t} & 0 \\ e^{4t}-e^{-2t} & e^{4t}+e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

---

(٩) إثبت أن : $\left|e^{At}\right|=\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}$ ، ومن ثم فإن e^{At} مصفوفة غير شاذة لجميع قيم λ, t .

الإثبات :

$$e^{At}=TD_{e^{\lambda_i t}}T^{-1} \Rightarrow \left|e^{At}\right|=|T|\left|D_{e^{\lambda_i t}}\right|\left|T^{-1}\right|=\left|D_{e^{\lambda_i t}}\right|\underbrace{|T|\left|T^{-1}\right|}_{=|I|=1}=\left|D_{e^{\lambda_i t}}\right|=\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i t}$$

وحتى لو كانت A شاذة (أي لها بعض القيم الذاتية أصفاراً) ، فإن الدالة الأسية لا تساوي الصفر ومن ثم فإن $\left|e^{At}\right| \neq 0$ وهذا معناه أن e^{At} دائماً غير شاذة وذلك لجميع قيم λ, t ، إذ أن :

$$\left(e^{At}\right)^{-1}=e^{-At}$$

٤-٣ باستخدام نظرية كايلي ـــ هاملتون (A شبه سهلة)

USING CAYLEY - HAMILTON THEOREM (A is semi-simple)

نظرية : نظرية كايلي ـــ هاملتون

كل مصفوفة مربعة A تحقق معادلتها الذاتية .. أي أنه إذا كان

$$|\lambda I-A|=a_0+a_1\lambda+\cdots\cdots+a_n\lambda^n=0$$

فإن

$$a_0 I+a_1 A+\cdots\cdots+a_n A^n=0$$

تُسمى النظرية السابقة بنظرية هاملتون ـــ كايلي أيضاً (أنظر *Finkbeiner D.T.* , 1978) .

الإثبات :

سوف نُقدم إثباتاً للمصفوفات شبه السهلة *Semi-Simple* وعلى القارئ أن يقرأ الإثبـــات في حالــة المصفوفات غير شبه السهلة *Non-Semi-Simple* في كتاب (*Deif A.S.*, 1982) .

دع A_n مصفوفة شبه سهلة لها (λ,u) . كذلك دع x متجه عام . وحيث أن $\{u_i\}$ تُكـــوِّن مجموعة مستقلة في R^n أو C^n ، فإن أي متجه في R^n أو C^n يمكن مده بدلالتها .. أي أن

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

وبالتالي فإن

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} c_i A u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i u_i$$

$$A^2 x = \sum_{i=1}^{n} c_i A^2 u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^2 u_i$$

$$\vdots$$

$$A^n x = \sum_{i=1}^{n} c_i A^n u_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda_i^n u_i$$

وبالتالي فإن

$$\left(a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \cdots\cdots + a_n A^n\right)x = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(a_0 + a_1\lambda_i + a_2\lambda_i^2 + \cdots\cdots + a_n\lambda_i^n\right)u_i = 0$$

(لماذا ؟).وحيث أن x متجه عام ، فإن الحل الوحيد هو

$$\sum_{i=1}^{n} a_i A^i = 0$$

٤-٣-١ بعض نتائج نظرية كايلي ــ هاملتون :



نتيجة (١) :

أي مصفوفة A_n^k (حيــث $k \geq n$) يمكــن فكهـا (أو مدهـا) كمتسلسلة قوى في A حتى القوة $(n-1)$.

الإثبات :

بما أن

$$\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = 0 \qquad \text{(a)}$$

فإن

$$A^n = -\frac{1}{a_n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$$

وبضرب (a) في A :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i A^{i+1} = 0$$

أي أن :

$$a_{n-1}A^n + a_n A^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = 0$$

وبالتالي فإن

$$a_n A^{n+1} = -a_{n-1}A^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = -a_{n-1}\left(\frac{-1}{a_n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = \frac{a_{n-1}}{a_n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i - \sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i$$

ومنها

$$A^{n+1} = \left(\frac{a_{n-1}}{(a_n)^2} - \frac{1}{a_n}\right)\sum_{i=0}^{n-1} a_i A^i = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i \quad , \quad \alpha_i = \left(\frac{a_{n-1}}{(a_n)^2} - \frac{1}{a_n}\right)a_i$$

وبالاستمرار بنفس الطريقة نصل إلى

$$A^{n+k} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^{(k)} A^i \quad , \quad k \ge 0$$

حيث $\beta_i^{(k)}$ ثوابت تخص الحالة k .



نتيجة ٢ :

أي دالة مصفوفية $f(A)$ يجب أن تقتطع إلى الحد A^{n-1} كحد أعلى

الإثبات :

عرضنا أن :

$$f(A) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i A^i$$

بشرط وجود التقارب . وباستعمال النتيجة (1) :

$$A^{n+k} = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^{(k)} A^i \quad , \quad k \geq 0$$

فإنه بتوالي التعويض عن القوى التي هي أعلى من $n - 1$ ، فلن يتبقى إلا الحدود ذات القوى أقل من n .. أي أنه في النهاية :

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i A^i$$

حيث γ_i ثوابت .

نتيجة ٣ :

دالة المعكوس A^{-1} يمكن الحصول عليها من $\sum_{i=0}^{n} a_i A^i = 0$ وذلك بضرب تلك الصيغة في A^{-1} .. أي أن

$$a_0 A^{-1} + a_1 I + a_2 A + \cdots\cdots + a_n A^{n-1} = 0$$

وبالتالي

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0}\left[a_1 I + a_2 A + \cdots\cdots + a_n A^{n-1}\right]$$

نتيجة ٤ :

يمكن استخدام مصفوفة فاندرموند *Vandermonde Matrix* في إيجاد المعاملات لمفكوك $f(A)$.

ملحوظة : مصفوفة فاندرموند للمصفوفة A هي المصفوفة V حيث

$$V = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

و $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_n$ هي القيم الذاتية للمصفوفة A وقد سبق فك مُحدد هذه المصفوفة في مسائل الباب الأول .

الإثبات :

حيث أن

$$f(A)=\gamma_0 I+\gamma_1 A+\cdots\cdots+\gamma_{n-1}A^{n-1} \qquad \text{(a)}$$

وباعتبار أن A شبه سهلة وكذلك

$$\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$$

فإن

$$T^{-1}AT=D \quad , \quad T^{-1}A^kT=D \quad , \quad T^{-1}f(A)T=D_{f(\lambda)}$$

وبضرب (a) من اليسار في T^{-1} ومن اليمين في T :

$$T^{-1}f(A)T=\gamma_0 I+\gamma_1 T^{-1}AT+\cdots\cdots+\gamma_{n-1}T^{-1}A^{n-1}T$$

أي أن

$$D_{f(\lambda)}=\gamma_0 I+\gamma_1 D_\lambda+\gamma_2 D_{\lambda^2}\cdots\cdots+\gamma_{n-1}D_{\lambda^{n-1}}$$

وهذه تؤدي إلى n من المعادلات المستقلة وهي :

$$f(\lambda_i)=\gamma_0+\gamma_1\lambda_i+\gamma_2\lambda_i^2\cdots\cdots+\gamma_{n-1}\lambda_i^{n-1} \quad , \quad i=1,2,\cdots,n$$

وفي الصورة المصفوفية فإننا نحصل على مصفوفة فاندرموند V :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}}_{=V} \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ f(\lambda_3) \\ \vdots \\ f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

وحيث أن مصفوفة فاندرموند V غير شاذة (لأن $\lambda_i \neq \lambda_j$ ، راجع مسألة ٢٩ في فصل ١ــ٣) فإننا نحصل على المعاملات $\gamma_0,\gamma_1,\cdots\cdots,\gamma_{n-1}$ بشكلٍ **فريد** ***Unique*** .

مثال : أوجد e^{At} إذا كان $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

<u>الحل :</u>

(لماذا ؟) ، وبالتالي فإن $\begin{bmatrix}1&0\\1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_0\\\gamma_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\e^{5t}\end{bmatrix}$ (لماذا ؟) ، ومن ثم $e^{At}=\gamma_0 I+\gamma_1 A$

$$\gamma_0=1 \quad , \quad \gamma_1=\frac{1}{5}\left(e^{5t}-1\right)$$

ومنها

$$e^{At}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}e^{5t}+\begin{bmatrix}4/5&-2/5\\-2/5&1/5\end{bmatrix}$$

لاحظ أن e^{At} متماثلة (لماذا ؟) .

٤-٤ الحدودية الصغرى MINIMUM POLYNOMIAL

إذا كانت A_n مصفوفة شبه سهلة أو غير شبه سهلة ، فهل الحدودية الذاتية Characteristic Polynomial (وسنرمز لها بالرمز $\Phi(A)$ التي تُسمى أحياناً بالدالة الذاتية Charateristic Function للمصفوفة A_n) هي الدالة الوحيدة لـ A_n التي تساوي المصفوفة الصفرية O ؟ . بالطبع لا .. فإن أي دالة مصفوفية على صورة

$$f(A)=\Phi(A)g(A)$$

يجب أن تساوي صفراً . وفي الواقع ليست الصورة السابقة لـ $f(A)$ هي الصورة الوحيدة التي تساوي صفراً .

> **<u>نظرية :</u>**
> **لمصفوفة مربعة A_n (شبه سهلة أو غير شبه سهلة) لابد أن تُوجد حدودية واحدة فقط $m(\lambda)$ والتي لها درجة μ (حيث $1\le\mu\le n$) بحيث يكون $m(A)=0$. تُسمى هذه الحدودية بـ الحدودية الصغرى Minimum Polynomial .**

<u>الإثبات :</u> دعنا نفترض وجود حدوديتين $m_1(\lambda)$, $m_2(\lambda)$ من درجة μ $(1\le\mu\le n)$ بحيث :

$$m_1(\lambda)=m_2(\lambda)=0$$

إذن

$$m_1(\lambda)=\sum_{i=0}^{\mu}\alpha_i\lambda^i=0 \quad , \quad \alpha_\mu=1$$

$$m_2(\lambda)=\sum_{i=0}^{\mu}\beta_i\lambda^i=0 \quad , \quad \beta_\mu=1$$

وبالطرح نجد أن

$$m^*(\lambda)=m_1(\lambda)-m_2(\lambda)=\sum_{i=0}^{\mu}(\alpha_i-\beta_i)\lambda^i=\sum_{i=0}^{\mu-1}\gamma_i\lambda^i=0$$

أي أن هناك حدودية ذات درجة أصغر من μ وهذا يتعارض مع أن $m_1(\lambda),m_2(\lambda)$ حدوديتان صغريتان لأنه في هذه الحالة تكون $m^*(\lambda)$ هي الحدودية الصغرى . ومن ثم فإن $m_1(\lambda)=m_2(\lambda)=m(\lambda)$. أي أن $m(\lambda)$ كحدودية صغرى تكون **فريدة *Unique*** .

نظرية :

كل حدودية $P(\lambda)$ بحيث $P(\lambda)=0$ يجب أن تكون قابلة للقسمة على الحدودية الصغرى $m(\lambda)$.

الإثبات :

دعنا نفترض أن هناك باقي للقسمة .. أي أن

$$P(\lambda)=m(\lambda)q(\lambda)+r(\lambda)$$

وبالتعويض بـ A نجد أن

$$P(A)=m(A)q(A)+r(A)$$

ولكن

$$P(A)=O \quad , \quad m(A)=O$$

إذن

$$r(A)=O$$

ولكن درجة $r(\lambda)$ أقل من μ (= درجة $m(\lambda)$) ، لذا فإن $m(\lambda)$ في هذه الحالة لا تكون الحدودية الصغرى إلا إذا $r(\lambda)=0$ أصلاً . وبالتالي فإن $P(\lambda)=m(\lambda)q(\lambda)$ .. أي أن $m(\lambda)$ تُقَسِّم $P(\lambda)$.

أي أن الحدودية الصغرى $m(\lambda)$ يجب أن تُقَسِّم أي حدودية أخرى $P(\lambda)$ إذا كان $P(\lambda)=0$.

نظرية :

كل عامل خطي Linear Factor $(\lambda - \lambda_i)$ في الحدودية الذاتية $\Phi(\lambda) = |A - \lambda I|$ تكون أيضاً عاملاً من عوامل $m(\lambda)$.

الإثبات :

فلنقسم $m(\lambda)$ على $(\lambda - \lambda_i)$ ولنفرض أن $(\lambda - \lambda_i)$ ليس عاملاً من عوامل $m(\lambda)$ ، إذن

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)s(\lambda) + r$$

حيث درجة $s(\lambda)$ هي $(\mu - 1)$ و r ثابت .وبالتعويض بـــ A نجد أن :

$$m(A) = (A - \lambda_i I_n)s(A) + rI_n \quad \text{(لماذا ؟)}$$
$$= 0 \quad \text{(لماذا ؟)}$$

فإذا كان $r \neq 0$ فإننا نجد الآتي :

$$(A - \lambda_i I)s(A) = -rI \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_i I)\left(\frac{-s(A)}{r}\right) = I$$

وهذا يعني أن $\left(\frac{-s(A)}{r}\right)$ هي معكوس $(A - \lambda_i I)$. ولكن λ_i هي إحدى القيم الذاتية لـــ A فهـــذا يعني أن $\rho(A - \lambda_i I) < n$ وهذا بدوره يعني أن $(A - \lambda_i I)$ ليس لها معكوس ، ومن ثم يجب أن تكون r أصلاً غير موجودة (أي أن $r = 0$) . إذن

$$m(\lambda) = (A - \lambda_i I)s(\lambda)$$

وهذا يُثبت منطوق النظرية أنه لابد للحدودية الصغرى $m(\lambda)$ ألا تترك عامل من عوامل $\Phi(\lambda)$.

عارض :

إذا كانت A_n مصفوفة شـــبه ســـهلة لهـــا قيـــم ذاتيـــة مميزة $((\lambda_i \neq \lambda_j \ , \forall i \neq j))$ فإن :

$$\Phi(\lambda) = (-1)^n m(\lambda)$$

الإثبات :

وهذا واضح لأن

$$\Phi(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^n |\lambda I - A| = (-1)^n \sum_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

وكذلك

$$m(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)$$

وبالتالي فإن

$$\Phi(\lambda) = (-1)^n m(\lambda)$$

في حالة القيم الذاتية المتميزة .

عارض :

إذا كانت A_n مصفوفة غير شبه سهلة ، فبشكلٍ عامٍ ، فإن الحدودية الصغرى $m(\lambda)$ ليست هي الحدودية الناتجة ببساطة من ضرب العوامل المتميزة لـ $\Phi(\lambda)$ (أي بإهمال التكرارية) .

الإثبات :

لإثبات النفي المطلوب فإنه يُكتفَى بإعطاء مثال . دع

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنها

$$\Phi(\lambda) = |A - \lambda I| = (-1)^3 (\lambda - 1)^3$$

فهل هذا يعني أن

$$m(\lambda) = (\lambda - 1)$$

للرد ، عوض بـ A في m ، ستجد أن

$$m(A) = A - I \neq 0$$

وهذا يعني أن $m(\lambda)$ ليست هي الحدودية الصغرى لـ A ولكن

$$m(\lambda)=(\lambda-1)^3$$

في هذه الحالة لأن

$$(A-I)^3=O$$

وكذلك

$$(A-I)^k \neq O \quad , \quad 1 \leq k < 3$$

ونلفت النظر هنا إلى أنه تُوجد طريقة لإيجاد $m(\lambda)$ صالحة للمصفوفات ذات الرتبة الصغيرة والتي عناصرها أعداد صحيحة بحيث يمكن حساب $A^2, A^3, \cdots, A^n$ وعلى القارئ المهتم أن يُراجع (*Hohn F.E.*, 1973 , *p*.416) .

بقي أن نقول أن تحديد $m(\lambda)$ مشكلة حقيقية لأن الطريقة السابق ذكرها في المرجع السابق صعبة ومملة ولكننا نجد إجابة تُريح الصدر في كتاب (*Deif A.S.*, 1981, *p*.112) نعرضها في النظرية التالية والخاصة بالمصفوفات شبه السهلة (وهي الحالة التي في أيدينا في هذا الفصل) :

نظرية :

إذا كانت A شبه سهلة فإن $m(\lambda)=\prod_{i=1}^{s}(\lambda-\lambda_i)$ **حيث s هي عدد القيم الذاتية المتميزة .**

الإثبات :

$$\prod_{i=1}^{s}(A-\lambda_i I)=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots\cdots(A-\lambda_s I)$$
$$=T\left[T^{-1}(A-\lambda_1 I)T.T^{-1}(A-\lambda_2 I)T.\cdots\cdots T^{-1}(A-\lambda_s I)T\right]T^{-1}$$

حيث T هي المصفوفة الظاهرية *Modal Matrix* لـ A (لاحظ أن T^{-1} موجودة .. لماذا ؟) ، ومن ثم

$$\prod_{i=1}^{s}(A-\lambda_i I)=T\left[(D_\lambda-\lambda_1 I)(D_\lambda-\lambda_2 I)\cdots\cdots(D_\lambda-\lambda_s I)\right]T^{-1}$$

ولكن إذا تذكرنا التالي :

(١) المصفوفة $(D_\lambda - \lambda_i I)$ قطرية وتحتوي على أصفار في أماكن تواجد λ_i على القطر .

(٢) حاصل ضرب المصفوفات القطرية هو مصفوفة قطرية .

و (٣) إذا كانت الأصفار موجودة على الأقطار بالتبادل في المصفوفات $(D_\lambda - \lambda_i I)$.

فإن الناتج النهائي لحاصل الضرب $\prod_{i=1}^{s}(D_\lambda - \lambda_i I)$ يجب أن يكون صفراً وهذا يعني بالتالي أن

$$\prod_{i=1}^{s}(A - \lambda_i I) = T[(D_\lambda - \lambda_1 I)(D_\lambda - \lambda_2 I)\cdots\cdots(D_\lambda - \lambda_s I)]T^{-1} = TOT^{-1} = O$$

أي أن $m(\lambda)$ هي الحدودية الصغرى (ذلك لأنها تحتوي على كل عوامل $\Phi(\lambda)$) ولا يمكن وجود حدودية أصغر منها .

ملحوظة : يمكن رؤية النقاط الثلاث (١) و (٢) و (٣) السابقة بوضوح من الأمثلة التالية :

$$\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

$$\left[\begin{array}{c|cc|c}5 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 6\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc|c}0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 7 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=O$$

نظرية :

إذا كانت A_n مصفوفة غير شبه سهلة *Non-Semi-Simple* وفي نفس الوقت غير منحلة *Non-Degenerate* فإن الحدودية الصغرى هي نفسها الحدودية الذاتية .

دعنا نلخص النتائج التي وصلنا إليها حتى الآن :

(i) إذا كانت $A = A_n$ شبه سهلة ولها قيم ذاتية متميزة ، فإن

$$\boxed{m(\lambda) = \Phi(\lambda) = |\lambda I - A|}$$

(ii) إذا كانت $A = A_n$ شبه سهلة ولها قيم ذاتية متميزة عددها s ($s \le n$) ، فإن

$$\boxed{m(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)}$$

وبهذا يتم خفض الرتبة من n إلى s .

(iii) إذا كانت $A = A_n$ غير شبه سهلة وغير منحلة ، فإنه يمكن حساب متجهات ذاتية مُعممة بحيث تضمها المصفوفة الظاهرية $\tilde{T}$ (والتي تكون غير شاذة) بحيث يمكن إجراء $\boxed{\tilde{T}^{-1} A \tilde{T} = J}$ وفي هذه الحالة تكون $\boxed{m(\lambda) = \Phi(\lambda)}$ ولا يمكن إجراء أي خفض في الرتبة .

(iv) إذا كانت $A = A_n$ غير شبه سهلة ومنحلة ، فإن $m(\lambda)$ تكون بين كونها $\Phi(\lambda)$ أو $\prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)$ حيث s هي عدد القيم الذاتية المتميزة .

وفي جميع الأحوال ؛ إذا علمنا $m(\lambda)$ فإنها تحل محل $\Phi(\lambda)$ في حسابات دوال المصفوفات وذلك باستعمال نظرية كايلي ــ هاملتون .

مثال : إحسب $m(\lambda)$ لــ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

الحل :

القيم الذاتية لـــ A هي

$$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_3 = -3$$

وعند $\lambda_1 = 2$:

$$(A-2I)u = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -5v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_2 + 2v_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_1 = \alpha \end{cases}$$

حيث α إختيارية . وبالتالي يمكن أخذ u على الصورة .

$$u = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والمصفوفة A هنا غير منحلة (لماذا ؟) ومن ثم فإن

$$(A-2I)(A+3I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$$

بينما

$$(A-2I)^2(A+3I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

إذن

$$m(\lambda) = (\lambda-2)^2(\lambda+3)$$

وهذا يتفق مع النظرية إذ يجب أن تكون $m(\lambda) = \Phi(\lambda)$.

مثال : إحسب e^{At} للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

الحل : القيم الذاتية لـــ A هي : $(\lambda_1 = \lambda_2 = 1 \quad , \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 2)$ والمتجهات الذاتية لها هي :

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix}\quad,\quad u_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\0\end{bmatrix}\quad,\quad u_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\quad,\quad u_4=\begin{bmatrix}2\\3\\1\\0\end{bmatrix}$$

والمصفوفة A شبه سهلة (لماذا ؟) .

الطريقة الأولى : الاستقطار

نحسب المصفوفة الظاهرية T ومنها e^{At} :

$$T=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&-1&0&3\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\Rightarrow T^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&-5&-1\\1&-1&1&-1\\0&0&0&2\\0&0&2&0\end{bmatrix}$$

ومنها

$$e^{At}=TD_{e^{\lambda t}}T^{-1}=\begin{bmatrix}e^t&0&2\left(e^{2t}-e^t\right)&\left(e^{2t}-e^t\right)\\0&e^t&3\left(e^{2t}-e^t\right)&0\\0&0&e^{2t}&0\\0&0&0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

الطريقة الثانية : باستخدام نظرية كايلي ـــ هاملتون

$$m(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)\qquad\qquad (\text{لماذا ؟})$$

وبالتالي فإن

$$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A\Rightarrow\left|\begin{matrix}\alpha_0+\alpha_1=e^t\\ \\ \alpha_0+2\alpha_1=e^{2t}\end{matrix}\right\rangle\Rightarrow\begin{cases}\alpha_0=2e^t-e^{2t}\\ \\ \alpha_1=e^{2t}-e^t\end{cases}$$

ومنها

$$e^{At}=\begin{bmatrix}e^t&0&2\left(e^{2t}-e^t\right)&\left(e^{2t}-e^t\right)\\0&e^t&3\left(e^{2t}-e^t\right)&0\\0&0&e^{2t}&0\\0&0&0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

٤-٥ استعمال نظرية كايلي ــ هاملتون في حالة A غير شــبه ســهلة ومنحلة

إذا كانت A شبه سهلة فإن الحدودية الصغرى تحل محل الحدودية الذاتية عند استعمالنا نظرية كايلي ــ هاملتون . ونعلم الآن أن الحدودية الصغرى تأخذ في الاعتبار القيم الذاتية المتميزة بغــض النظر عن تكرارها ..أي أن

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{s-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{s-1} \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_3^{s-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_s & \lambda_s^2 & \cdots & \lambda_s^{s-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) \\ f(\lambda_2) \\ f(\lambda_3) \\ \vdots \\ f(\lambda_s) \end{bmatrix}$$

ويكون

$$f(A) = \sum_{i=0}^{s-1} c_i A^i \quad , \quad s \leq n$$

حيث s هي عدد القيم الذاتية المتميزة . وفي هذه الحالة نقول أن هناك **اختزالاً في الرتبة** ***Reduction in Order*** .

أما في حالة كون المصفوفة A غير شبه سهلة وفي نفس الوقت غير منحلة ، فإننا نعلم الآن أنه يجب علينا استعمال الحدودية الذاتية دون خفض في الرتبة (رغم وجود التكرارية الجبرية) .. أي أن

$$f(A) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i A^i$$

أما **عدم التحديد** فيأتي في حالة كون المصفوفة A غير شبه سهلة و منحلة .. في هذه الحالــة نعلم أن درجة الحدودية الصغرى تتراوح بين s (عدد القيم الذاتية المتميزة) و n (الرتبة) .. ولكن كيف نحددها ؟ . لا سبيل إلا حساب

$$\prod_{i=1}^{k} \left(A - \lambda_i I\right) \quad , \quad s \leq k \leq n$$

وقيمة k التي تجعل حاصل الضرب صفراً هي درجة الحدودية الصغرى .. ولكنها طريقة عقيمة بـــلا شك . وهناك عدة طرق يمكن اللجوء إليها لتكون الصورة أوضح من ذلك .

عارض :

تكرارية جبرية كاملة Complete Multiplicity (حالة $m = n$) :

التكراريـــــة $\left(\Phi((\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^n = 0\right)$ تجعــــــل $\left(f(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \lambda^i\right)$ تُعطي n من المعـــادلات المســـتقلة إذا مـــا تم تفاضلها بالنسبة لـــ λ $(n - 1)$ من المـــرات .

الإثبات :

إذا كانت : $\Phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^n = 0$

هي المعادلة الذاتية للمصفوفة A_n ، فإن $f(A)$ تحقق الآتي

$$f(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots\cdots + \alpha_{n-1} A^{n-1}$$

وبالتالي فإن

$$f(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \cdots\cdots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} \qquad (1)$$

وبتفاضل العلاقة (1) بالنسبة لـــ λ نجد أن

$$f'(\lambda) = \frac{df}{d\lambda} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda + \cdots\cdots + (n-1)\alpha_{n-1} \lambda^{n-2} \qquad (2)$$

وبتوالي التفاضل $(n - 1)$ من المرات نصل إلى

$$f''(\lambda) = \frac{d^2 f}{d\lambda^2} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \lambda + \cdots\cdots + (n-1)(n-2)\alpha_{n-1} \lambda^{n-2} \qquad (3)$$

$$f'''(\lambda) = \frac{d^3 f}{d\lambda^3} = 6\alpha_3 + 24\alpha_4 \lambda + \cdots\cdots + (n-1)(n-2)(n-3)\alpha_{n-1} \lambda^{n-3} \qquad (4)$$

$$f^{(n-1)}(\lambda) = \frac{d^{(n-1)} f}{d\lambda^{(n-1)}} = (n-1)!\alpha_{n-1} \qquad (n)$$

والمعادلات من (1) إلى (n) يمكن وضعها على الصورة المصفوفية :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{n-1} \\ 0 & 1 & 2\lambda & \cdots & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & (n-1)(n-2)\lambda^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-1)! \end{bmatrix}_{n\times n}}_{=U} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\lambda) \\ f'(\lambda) \\ f''(\lambda) \\ \vdots \\ f^{(n-1)}(\lambda) \end{bmatrix}$$

ولكن محدد مصفوفة المعاملات U السابقة (= حاصل ضرب عناصر القطر) لا يساوي الصفر ، وبالتالي فهذه المعادلات مستقلة .

ملحوظة :

يمكننا استعمال نتيجة هذا العارض في حسابات $f(A)$ كما سيلي في الأمثلة القادمة .

ويمكن الرجوع **للجدول المبين في الصفحة التالية كملخص** لما تم تناوله في هذا الباب .

مثال توضيحي : خذ المصفوفات .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

أولاً : بالنسبة للمصفوفة A

لها القيم الذاتية $2 , 2 , 2 , 2$ ومتجهاتها الذاتية هي

ملخص : **المصفوفة A**

شبه سهلة ***Semi-Simple***	غير شبه سهلة ***Non-Semi-Simple***	
$\rho(u_1, u_2, \cdots, u_n) = n$ أو $\lambda_i \neq \lambda_j \ , \forall i \neq j$ أو A متماثلة	$\rho(u_1, u_2, \cdots, u_n) < n$	
قطرية *Diagonalizable*	غير مُنحلة *Non-Derogatory*	مُنحلة *Derogatory*
$T^{-1}AT = D_\lambda$	$\rho(u_1, u_2, \text{L} \ , u_m) = 1$	$\rho(u_1, u_2, \cdots, u_m) = r > 1$
$T^{-1}f(A)T = D_{f(\lambda)}$	λ لها تكرارية جبرية m	λ لها تكرارية جبرية m
$m(\lambda) = \prod_{i=1}^{s} (\lambda - \lambda_i)$ حيث s عدد القيـــــم الذاتية المتميزة	*Generalized Eignvectors* $\tilde{u}$ $\tilde{T} = [\tilde{u}_1 \ \cdots \ \tilde{u}_m \ \cdots]$	*Generalized Eignvectors* $\tilde{u}$ $\tilde{T} = [\tilde{u}_1 \ \cdots \ \cdots \ \tilde{u}_n]$
	<u>شكل جوردان</u> <u>*Jordan Form*</u>	<u>شكل جوردان</u> <u>*Jordan Form*</u>
	$\tilde{T}^{-1}AT = J$ $\tilde{T}^{-1}f(A)T = J_f$ $J = \left[\begin{array}{cccc:ccc} \lambda & \delta & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \lambda & \cdots & \vdots & & O & \\ \vdots & \cdots & \ddots & \delta & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & & & \\ \hdashline & & & & \lambda_{m+1} & \cdots & 0 \\ & O & & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \cdots & \lambda_n \end{array}\right]$	$\tilde{T}^{-1}AT = J$ $\tilde{T}^{-1}f(A)T = J_f$ $J = \left[\begin{array}{c:c:c:c} J_{r_1} & O & \cdots & O \\ \hdashline O & J_{r_2} & \cdots & O \\ \hdashline \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hdashline O & O & \cdots & J_{r_k} \end{array}\right]$
	يُوجد قالب جوردان واحد لكـــل λ لهـــا تكرارية جبرية m	يُوجد r من القوالب لكل λ لها تكرارية جبرية m ، $\sum_{j=1}^{k} r_j = m$
	$m(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i) = \lvert \lambda I - A \rvert = \Phi(\lambda)$	$m(\lambda) = ?$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

أي أن لها متجهات ذاتية مستقلة ، فهي شبه سهلة . ونلاحظ أن الحدودية الصغرى هي

$$m(\lambda) = (\lambda - 2)$$

لأن

$$A - 2I = O$$

وهذا يُحقق أن $s = 1$ (= عدد القيم الذاتية المتميزة) و A شبه سهلة .

ثانياً : بالنسبة للمصفوفة B

لها القيم الذاتية 2 , 2 , 2 , 2 ومتجهاتها الذاتية تتحدد من

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

وهذا يُعطي $b_4 = 0$ في حين أن b_1, b_2, b_3 تكون إختيارية . وعليه يمكن أخـذ المتجهـات الذاتيـة (بالإختيار) كالآتي :

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن

$$\rho[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] = 3 < n$$

وبالتالي فهي غير شبه سهلة و منحلة . كذلك نجد أن

$$B - 2I \neq O$$

ولكن

$$(B - 2I)(B - 2I) = O$$

(تأكد بنفسك) . إذن

$$m(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

وهذا يُحقق أن المصفوفة غير شبه سهلة تقع حدوديتها بين $\prod_{i=1}^{s}(\lambda - \lambda_i)$ (حيث s = عـــدد القيـــم الذاتية المتميزة) وبين كونها $\Phi(\lambda) = |\lambda I - B|$.

ولإيجاد $f(B)$ فإننا نستعمل نظرية كايلي ــ هاملتون كالآتي :

حيث أن : $m(\lambda) = (\lambda - 2)^2$

إذن هناك خفض في الرتبة بمقدار (2) عن المعتاد .. وبالتالي تكون

$$f(B) = \alpha_0 I + \alpha_1 B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 \lambda = f(\lambda) \\ \\ \alpha_1 = f'(\lambda) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_0 = f(\lambda) - 2f'(\lambda) \\ \\ \alpha_1 = f'(\lambda) \end{cases}$$

فإذا كانت $f(B) = e^{Bt}$ ، فإن (مع الأخذ في الإعتبار أن $\lambda = 2$) :

$$\alpha_0 = e^{2t} - 2te^{2t} \quad , \quad \alpha_1 = te^{2t}$$

وبالتالي تكون

$$e^{Bt} = \left(e^{2t} - 2te^{2t}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{2t}\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

ملاحظة هامة :

بإجراء التجزئ لـــــ B :

$$B = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & O \\ \hline O & J_1 \end{array}\right]$$

ومنها

$$e^{Bt}=\left[\begin{array}{cc|c} e^{2t} & 0 & O \\ 0 & e^{2t} & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{O} & e^{J_1 t} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc|cc} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

وهذا يُؤكد ما وصلنا إليه بحل المعادلات .

ملحوظة : لإيجاد $e^{J_1 t}$ أنظر التمارين المحلولة في فصل ٤-٦ .

ثالثاً : بالنسبة للمصفوفة C

لها القيم الذاتية 2 , 2 , 2 , 2 ومتجهاتها الذاتية تتحدد من

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهذا يُعطي $b_3 = b_4 = 0$ في حين أن b_1, b_2 تكون إختيارية . وعليه يمكن أخذ المتجهات الذاتية (بالإختيار) كالآتي :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن

$$\rho[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4] = 2 < n$$

وبالتالي فهي غير شبه سهلة و منحلة . كذلك نجد أن

$$C - 2I \neq O \quad , \quad (C-2I)^2 \neq O$$

ولكن :

$$(C-2I)^3 = O$$

(تأكد بنفسك) . إذن

$$m(\lambda) = (\lambda - 2)^3$$

وهو شبيه بالحالة السابقة (ثانياً) . ولإيجاد $f(C)$ فإننا نستعمل نظرية كايلي ــ هاملتون كـــالآتي (مع خفض الرتبة بمقدار (1) عن المعتاد) :

$$f(C)=\alpha_0 I+\alpha_1 C+\alpha_2 C^2 \quad \Rightarrow \begin{cases}\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2=f(\lambda)\\ \alpha_1+2\alpha_2\lambda=f'(\lambda)\\ 2\alpha_2=f''(\lambda)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\alpha_0=f(\lambda)-\lambda f'(\lambda)+\frac{1}{2}\lambda^2 f''(\lambda)\\ \alpha_1=f'(\lambda)-\lambda f''(\lambda)\\ \alpha_2=\frac{1}{2}f''(\lambda)\end{cases}$$

فإذا كانت $f(C)=e^{Ct}$ ، فإن (مع الأخذ في الإعتبار أن $\lambda=2$) :

$$\alpha_0=e^{2t}-2te^{2t}+2t^2e^{2t} \quad , \quad \alpha_1=te^{2t}-2t^2e^{2t} \quad , \quad \alpha_2=\frac{1}{2}t^2e^{2t}$$

وبالتالي تكون

$$e^{Ct}=\left(e^{2t}-2te^{2t}+2t^2e^{2t}\right)\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\left(te^{2t}-2t^2e^{2t}\right)\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}t^2e^{2t}\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&4&1\\0&0&4&4\\0&0&0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2t}&0&0&0\\0&e^{2t}&te^{2t}&\frac{1}{2}t^2e^{2t}\\0&0&e^{2t}&te^{2t}\\0&0&0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

ملاحظة :

بإجراء التجزئ لـــ C :

$$C=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&O\\O&\underbrace{\begin{matrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{matrix}}_{=J_2=Jordan block}\end{bmatrix}$$

ومنها

$$e^{Ct}=\left[\begin{array}{c|c} e^{2t} & O \\ \hline O & e^{J_2 t}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|ccc} e^{2t} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t}\end{array}\right] .$$

وهذا يُؤكد ما وصلنا إليه بحل المعادلات .

ملحوظة : لإيجاد $e^{J_2 t}$ أنظر التمارين المحلولة في فصل ٤-٦ .

رابعاً : بالنسبة للمصفوفة D

لها القيم الذاتية $2 , 2 , 2 , 2$ ومتجهاتها الذاتية تتحدد من

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهذا يُعطي $b_2=b_3=b_4=0$ في حين أن b_1 تكون إختيارية . وعليه يمكن أخذ المتجهات الذاتية (بالإختيار) كالآتي :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن

$$\rho[u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4]=1$$

وبالتالي فهي غير شبه سهلة ولكنها غير منحلة . في هذه الحالة يجب أن يكون

$$m(\lambda)=\Phi(\lambda)$$

ومن السهل التحقق :

$$m(\lambda)=(\lambda-2)^4$$

أي أن :

$$m(A)=(A-2I)^4=O$$

(تأكد بنفسك) .

ولإيجاد $f(D)$ فإننا نستعمل نظرية كايلي ـــ هاملتون كالآتي:

$$f(D)=\alpha_0 I+\alpha_1 D+\alpha_2 D^2+\alpha_3 D^3 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2+\alpha_3\lambda^3=f(\lambda) \\ \alpha_1+2\alpha_2\lambda+3\alpha_3\lambda^2=f'(\lambda) \\ 2\alpha_2+6\alpha_3\lambda=f''(\lambda) \\ 6\alpha_3=f'''(\lambda) \end{cases}$$

فإذا كانت $f(C)=e^{Ct}$ ، فإن (مع الأخذ في الإعتبار أن $\lambda=2$) فإننا نصل إلى (علـــى حســـب كونها قالب من قوالب جوردان) :

$$e^{Dt}=e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وأرجو من القارئ أن يُراجع التمارين المحلولة في فصل ٤ـــ٦ لإيجاد $e^{J_3 t}$.

ملاحظة :

كما فعلنا مع المصفوفتين C , B ، نلاحظ أن المصفوفة D في مثالنا هذا هي قالب من قوالب جوردان J_3 ، وبالتالي فإن :

$$e^{Dt}=e^{J_3 t}$$

وهذا يُؤكد صحة ما كتبناه .

ملاحظة عامة :

من الممكن محاولة إيجاد متجهات مُعممـــة *Generalized Vectors* في كـــل الحـــالات مـــاعدا أولاً (المصفوفة A) ، وإيجاد المتجهات المُعممة في حالة المصفوفة غير المنحلة أسهل نسبياً عنها في حالـــة المصفوفة المنحلة .. ولكن ، بشكلٍ عامٍ ، يُفضل معرفة الحدودية الصغرى ثم استعمال نظرية كـــايلي ـــ هاملتون .. فهذا على ما يبدو أسهل الطرق .

٤-٦ تمارين محلولة

(١) إذا كانت $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ أوجد e^{At} .

الحل :

$$|\lambda I - A| = (\lambda - 2)^2 = 0$$

ومنها نستنتج أن القيم الذاتية هي 2 , 2 . لاحظ أن درجة الحدودية الصغرى هـي نفسـها درجـة الحدودية الذاتية ، وبالتالي لا نستطيع استعمال نظرية كايلي ــ هاملتون مباشرةً .. إذ أن مصفوفـة فاندرموند ستكون شاذة (لماذا ؟) . ولكن نضع :

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 At \qquad (1)$$

ومنها

$$e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda t \qquad (2)$$

وبتفاضل (2) بالنسبة لـ λ :

$$e^{\lambda t} = \alpha_1 \qquad (3)$$

ومن (3) , (2) :

$$\alpha_1 = e^{\lambda t} \quad , \quad \alpha_0 = (1 - \lambda t)e^{\lambda t}$$

وبالتعويض في (1) عن :

$$\alpha_1 = e^{\lambda t} \quad , \quad \alpha_0 = (1 - \lambda t)e^{\lambda t} \quad , \quad \lambda = 2$$

نحصل على

$$e^{At} = (1 - \lambda t)e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} t \Bigg|_{\lambda = 2} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

---

(٢) إذا كان $Au_1 = \lambda u_1 \, , \, A\tilde{u}_2 = \lambda \tilde{u}_2 + u_1$ ، فاثبت أن $\left(f(A)\tilde{u}_2 = f(\lambda)\tilde{u}_2 + f'(\lambda)u_1\right)$

الإثبات :

$$\begin{aligned}
A\tilde{u}_2 &= \lambda \tilde{u}_2 + u_1 \\
A^2\tilde{u}_2 &= A(A\tilde{u}_2) = A(\lambda \tilde{u}_2 + u_1) = \lambda(A\tilde{u}_2) + (Au_1) \\
&= \lambda(\lambda \tilde{u}_2 + u_1) + (\lambda u_1) = \lambda^2 \tilde{u}_2 + 2\lambda u_1 \\
A^3\tilde{u}_2 &= A(A^2\tilde{u}_2) = A(\lambda^2 \tilde{u}_2 + 2\lambda u_1) = \lambda^2(A\tilde{u}_2) + 2\lambda(Au_1) \\
&= \lambda^2(\lambda \tilde{u}_2 + u_1) + 2\lambda(\lambda u_1) = \lambda^3 \tilde{u}_2 + 3\lambda^2 u_1
\end{aligned}$$

$$A^4\tilde{u}_2 = A\left(A^3\tilde{u}_2\right) = A\left(\lambda^3\tilde{u}_2 + 3\lambda^2 u_1\right) = \lambda^3\left(A\tilde{u}_2\right) + 3\lambda^2\left(Au_1\right)$$
$$= \lambda^3\left(\lambda\tilde{u}_2 + u_1\right) + 3\lambda^2\left(\lambda u_1\right) = \lambda^4\tilde{u}_2 + 4\lambda^3 u_1$$
$$\vdots$$
$$A^m\tilde{u}_2 = \lambda^m\tilde{u}_2 + m\lambda^{m-1}u_1$$

وبالتالي ، إذا كان

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}A^{n-1}$$

فإن

$$f(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + a_3\lambda^3 + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1}$$

وبالتفاضل بالنسبة لـ λ :

$$f'(\lambda) = a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \cdots\cdots\cdots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2}$$

ومنها يمكن حساب :

$$f(A)\tilde{u}_2 = a_0\tilde{u}_2 + a_1 A\tilde{u}_2 + a_2 A^2\tilde{u}_2 + a_3 A^3\tilde{u}_2 + \cdots\cdots\cdots + a_{n-1}A^{n-1}\tilde{u}_2$$
$$= a_0\tilde{u}_2 + a_1\left(\lambda\tilde{u}_2 + u_1\right) + a_2\left(\lambda^2\tilde{u}_2 + 2\lambda u_1\right) + a_3\left(\lambda^3\tilde{u}_2 + 3\lambda^2 u_1\right) +$$
$$\cdots\cdots + a_{n-1}\left(\lambda^{n-1}\tilde{u}_2 + (n-1)\lambda^{n-2}u_1\right)$$
$$= \left(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots\cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1}\right)\tilde{u}_2$$
$$+ \left(a_1 + 2a_2\lambda + 3a_3\lambda^2 + \cdots\cdots + (n-1)a_{n-1}\lambda^{n-2}\right)u_1$$
$$= f(\lambda)\tilde{u}_2 + f'(\lambda)u_1$$

---

(٣) إذا كان $\left(Au_1 = \lambda u_1 \,,\, A\tilde{u}_2 = \lambda\tilde{u}_2 + u_1 \,,\, A\tilde{u}_3 = \lambda\tilde{u}_3 + \tilde{u}_2\right)$ ، فأثبت أن :

$$f(A)\tilde{u}_3 = f(\lambda)\tilde{u}_3 + f'(\lambda)\tilde{u}_2 + \frac{f''(\lambda)}{2!}u_1$$

الإثبات :

سنحاول إثبات المطلوب على خطوتين :

الخطوة الأولى : نحاول إثبات صحة المطلوب وذلك إذا كانت $f(A) = A^m$ حيث m عدد صحيح موجب . لذا دع $f(A) = A^m$ ، إذن $f(\lambda) = \lambda^m$ ، وبالتالي يكون المطلوب إثبات أن :

$$A^m\tilde{u}_3 = \lambda^m\tilde{u}_3 + m\lambda^{m-1}\tilde{u}_2 + \frac{m(m-1)}{2}\lambda^{m-2}u_1 \qquad \text{(a)}$$

ولإثبات ذلك نستخدم **الإستنتاج الرياضي** ***Mathematical Induction*** :

★ **عند $m=1$:**

بالتعويض عن $m=1$ في كلٍ من الطرف الأيسر (*L.H.S.*) والطرف الأيمن (*R.H.S.*) للعلاقة (a) ، نجد أن :

$$L.H.S. = A\tilde{u}_3$$
$$R.H.S. = \lambda\tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 + 0 = \lambda\tilde{u}_3 + \tilde{u}_2$$

إذن (ومن المعطيات) : $L.H.S.=R.H.S$

أي أن العلاقة (a) صحيحة عند $m=1$.

★ **عند $m=2$:**

بالتعويض عن $m=2$ في كلٍ من الطرف الأيسر (*L.H.S.*) والطرف الأيمن (*R.H.S.*) للعلاقة (a) ، نجد أن :

$$L.H.S. = A^2\tilde{u}_3 = A(A\tilde{u}_3) = A(\lambda\tilde{u}_3 + \tilde{u}_2) = \lambda(A\tilde{u}_3) + (A\tilde{u}_2)$$
$$= \lambda(\lambda\tilde{u}_3 + \tilde{u}_2) + (\lambda\tilde{u}_2 + u_1) = \lambda^2\tilde{u}_3 + 2\lambda\tilde{u}_2 + u_1$$
$$R.H.S. = \lambda^2\tilde{u}_3 + 2\tilde{u}_2 + u_1$$

إذن : $L.H.S.=R.H.S$

أي أن العلاقة (a) صحيحة عند $m=2$.

★ **عند $m=k$:**

بفرض صحة العلاقة (a) عند $m=k$ ، بالتعويض عن $m=k$ في العلاقة (a) ، نجد أن :

$$A^k\tilde{u}_3 = \lambda^k\tilde{u}_3 + k\lambda^{k-1}\tilde{u}_2 + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}u_1 \qquad \text{(b)}$$

وبضرب العلاقة (b) من اليسار في A :

$$A^{k+1}\widetilde{u}_3 = \lambda^k(A\widetilde{u}_3) + k\lambda^{k-1}(A\widetilde{u}_2) + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}(Au_1)$$
$$= \lambda^k(\lambda\widetilde{u}_3 + \widetilde{u}_2) + k\lambda^{k-1}(\lambda\widetilde{u}_2 + u_1) + \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2}(\lambda u_1)$$
$$= \lambda^{k+1}\widetilde{u}_3 + (k+1)\lambda^k\widetilde{u}_2 + \frac{(k+1)(k)}{2}\lambda^{k-2}u_1$$

وهي نفسها العلاقة (a) عند $m = k+1$. أي أنه إذا كانت العلاقة (a) صحيحة عند $m = k$ فستكون صحيحة عند $m = k+1$. وحيث أنها صحيحة عنـــد $m = 1,2$ ، فبالتالي هي صحيحة عند كل القيم الصحيحة الموجبة لــ m .

الخطوة الثانية : والآن لإثبات المطلوب فإنه من نظرية كايلي ــ هاملتون :

$$f(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + a_3 A^3 + \cdots\cdots + a_{n-1}A^{n-1}$$

وبالضرب (من اليمين) في $\widetilde{u}_3$:

$$f(A)\widetilde{u}_3 = a_0\widetilde{u}_3 + a_1 A\widetilde{u}_3 + a_2 A^2\widetilde{u}_3 + a_3 A^3\widetilde{u}_3 + \cdots\cdots + a_{n-1}A^{n-1}\widetilde{u}_3$$
$$= a_0\widetilde{u}_3 + a_1(\lambda\widetilde{u}_3 + \widetilde{u}_2) + a_2(\lambda^2\widetilde{u}_3 + 2\lambda\widetilde{u}_2 + u_1) + a_3(\lambda^3\widetilde{u}_3 + 3\lambda^2\widetilde{u}_2 + 3\lambda u_1)$$
$$+ a_4(\lambda^4\widetilde{u}_3 + 4\lambda^3\widetilde{u}_2 + 6\lambda^2 u_1) + \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{n-1}\left(\lambda^{n-1}\widetilde{u}_3 + (n-1)\lambda^{n-2}\widetilde{u}_2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-3}u_1\right)$$

(لماذا ؟)

$$= (a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1})\widetilde{u}_3$$
$$+ (a_1 + 2\lambda a_2 + 3\lambda^2 a_3 + \cdots\cdots\cdots\cdots + (n-1)\lambda^{n-2}a_{n-1})\widetilde{u}_2$$
$$+ \left(a_2 + 3\lambda a_3 + 6\lambda^2 a_4 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\lambda^{n-2}a_{n-1}\right)u_1$$
$$= f(\lambda)\widetilde{u}_3 + f'(\lambda)\widetilde{u}_2 + \frac{f''(\lambda)}{2}u_1$$

تمرين للقارئ :

هل يمكنك تعميم المثالين الأخيرين .. بمعنى آخر ، حاول إثبات الآتي :

(أ) إذا كانت

$$Au_1 = \lambda u_1 \quad , \quad A\tilde{u}_2 = \lambda\tilde{u}_2 + u_1 \quad , \quad A\tilde{u}_3 = \lambda\tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 \quad , \quad A\tilde{u}_4 = \lambda\tilde{u}_4 + \tilde{u}_3$$

فإن

$$f(A)\tilde{u}_4 = f(\lambda)\tilde{u}_4 + f'(\lambda)\tilde{u}_3 + \frac{f''(\lambda)}{2!}\tilde{u}_2 + \frac{f'''(\lambda)}{3!}u_1$$

(ب) إذا كانت

$$\begin{array}{ll} Au_1 = \lambda u_1 & , \quad A\tilde{u}_2 = \lambda\tilde{u}_2 + u_1 \\ A\tilde{u}_3 = \lambda\tilde{u}_3 + \tilde{u}_2 & , \quad A\tilde{u}_4 = \lambda\tilde{u}_4 + \tilde{u}_3 \\ \vdots & , \quad \vdots \\ A\tilde{u}_{m-1} = \lambda\tilde{u}_{m-1} + \tilde{u}_{m-2} & , \quad A\tilde{u}_m = \lambda\tilde{u}_m + \tilde{u}_{m-1} \end{array}$$

فإن

$$f(A)\tilde{u}_m = f(\lambda)\tilde{u}_m + f'(\lambda)\tilde{u}_{m-1} + \frac{f''(\lambda)}{2!}\tilde{u}_{m-2} + \frac{f'''(\lambda)}{3!}\tilde{u}_{m-3} + \cdots\cdots + \frac{f^{(m-1)}(\lambda)}{(m-1)!}u_1$$

وأوجه نظر القارئ إلى أنه يمكن مراجعة (*Deif A.S.*, 1982 , *p.*179) للإستفادة من نتائج التمرينين السابقين إلى محاولة إيجاد طريقة عامة للحصول على المُعاملات في نظرية كايلي ــ هاملتون لأي حالة من الحالات وهي تُكافئ مُفاضلة المعادلة الذاتية للحصول على عدد من المعادلات يُساوي عدد المجاهيل .

---

(٤) إحسب e^{Jt} حيث $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

الحل :

القيم الذاتية لـ J هي : λ,λ والمتجهات الذاتية هي $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، وبالتالي فإن J شبه سهلة ويكون

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = T^{-1} \quad , \quad e^{Jt} = Te^{Jt}T^{-1} = e^{Jt}$$

وبالتالي لا يصلح لها طريقة قوالب جوردان (حيث أنها هي نفسها من قوالب جوردان) . لذا نلجأ لأسلوب آخر .

$$e^{Jt} = \alpha_0 I + \alpha_1 J \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda \quad \xrightarrow{d/d\lambda} \quad te^{\lambda t} = \alpha_1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = e^{\lambda t} - t\lambda e^{\lambda t} \\ \alpha_1 = te^{\lambda t} \end{cases}$$

وبالتالي :

$$e^{Jt} = \left(e^{\lambda t} - t\lambda e^{\lambda t}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + te^{\lambda t}\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

ملحوظة هامة :

يمكن للقارئ إثبات أنه إذا كانت

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

فإن

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

وإذا كانت

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

فإن

$$e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبوجهٍ عام ، إذا كانت

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda \end{bmatrix}_{m\times m}$$

فإن

$$e^{Jt} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3 & \cdots & \cdots & \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ \vdots & & & & 0 & 1 & t \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

---

(٥) إذا كان $\left(A = diag(A_1, A_2, \cdots\cdots, A_m)\right)$ ، أثبت أن

$$e^{At} = diag\left(e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \cdots\cdots, e^{A_m t}\right)$$

الإثبات :

افترض أن كل مصفوفة A_i لها T_i بحيث يكون $T_i^{-1}A_iT_i = J_i$ أو أن

$$e^{A_i t} = T_i e^{J_i t} T_i^{-1} \quad , \quad i = 1,2,\cdots\cdots, m$$

ولكن من مثال سابق في الباب الثالث أثبتنا أن

$$T_A = \begin{bmatrix} T_1 & O & \cdots & O \\ O & T_2 & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & T_m \end{bmatrix}$$

وأن

$$T_A^{-1} = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & T_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & T_m^{-1} \end{bmatrix}$$

وبالتالي إذا افترضنا أن

$$e^{At} = diag\left(e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \cdots\cdots, e^{A_m t}\right)$$

فإن

$$T_A^{-1}e^{At}T_A = \begin{bmatrix} T_1^{-1} & O & \cdots & O \\ O & T_2^{-1} & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & T_m^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{A_1 t} & O & \cdots & O \\ O & e^{A_2 t} & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & e^{A_m t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 & O & \cdots & O \\ O & T_2 & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & T_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_1^{-1}e^{A_1 t}T_1 & O & \cdots & O \\ O & T_2^{-1}e^{A_2 t}T_2 & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & T_m^{-1}e^{A_m t}T_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & O & \cdots & O \\ O & e^{J_2 t} & \cdots & O \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & e^{J_m t} \end{bmatrix}$$

$$= e^{Jt}$$

وبالتالي فإن e^{At} يجب أن تكون على الصورة .

$$e^{At} = diag\left(e^{A_1 t}, e^{A_2 t}, \ldots\ldots, e^{A_m t}\right)$$

---

(٦) أوجد e^{At} للمصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -27 & 54 & -36 & 10 \end{bmatrix}$.

الحل :

القيم الذاتية :

$$\Phi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^4 - 10\lambda^3 + 36\lambda^2 - 54\lambda + 27 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda - 3)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 3$$

المتجهات الذاتية :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \\ 27 \end{bmatrix}$$

أي أن المصفوفة A غير شبه سهلة ولكنها غير منحلة (أو أحياناً يُطلق عليها بسيطة الإنحـــلال *Simple Degeneracy*) . ولإيجاد e^{At} هناك أكثر من أسلوب :

الأسلوب الأول : باستعمال أشكال جوردان *Jordan Forms* :

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

حيث T تحتوي على المتجهات الذاتية u_1, u_2, u_3, u_4 و u_3, u_4 متجهات مُعممة تحسب كالآتي :

$$Au_3 = 3u_3 + u_2 \quad \Rightarrow \quad u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 15 \\ 54 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$Au_4 = 3u_4 + u_3 \quad \Rightarrow \quad u_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 36 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 15 & 7 \\ 1 & 27 & 54 & 36 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad T^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 27 & -27 & 9 & -1 \\ -85 & 133 & -55 & 7 \\ 66 & -106 & 46 & -6 \\ -36 & 60 & -28 & 4 \end{bmatrix}$$

وكذلك

$$J = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

(لماذا ؟) ، ويكون

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{c|c} e^t & O \\ \hline O & e^{J_2 t} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} e^t & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{3t} & te^{3t} & \frac{1}{2}t^2e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} & te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{array}\right]$$

وفي النهاية يكون

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

لاحظ أن درجة الحدودية الصغرى هي نفسها درجة الحدودية الذاتية (لماذا ؟) .

الأسلوب الثاني : باستعمال نظرية كايلي ـــ هاملتون :

دع

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3$$

إذن

$$e^{\lambda t} = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 \lambda^3 \qquad (1)$$

وبالتفاضل بالنسبة لـــ λ :

$$te^{\lambda t} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \lambda + 3\alpha_3 \lambda^2 \qquad (2)$$

وبالتفاضل مرةً أخرى بالنسبة لـــ λ :

$$t^2 e^{\lambda t} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 \lambda \qquad (3)$$

وعند $\lambda = 1$ (بالتعويض في (1)) :

$$e^t = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \qquad (4)$$

وعند $\lambda = 3$ (بالتعويض في (3) , (2) , (1)) :

$$e^{3t} = \alpha_0 + 3\alpha_1 + 9\alpha_2 + 27\alpha_4 \qquad (5)$$

$$te^{3t} = \alpha_1 + 6\alpha_2 + 27\alpha_3 \qquad (6)$$

$$t^2 e^{3t} = 2\alpha_2 + 18\alpha_3 \qquad (7)$$

والمعادلات (7) , (6) , (5) , (4) يمكن وضعها على الصورة المصفوفية الآتية :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 0 & 1 & 6 & 27 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \end{bmatrix}}_{=H} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{3t} \\ te^{3t} \\ t^2 e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (8)$$

ملاحظة : تسمى المصفوفة H بـــــــ مصفوفــة هسـنبرج *Hessenberg Matrix* ، وهي مصفوفة غير شاذة (أنظر مسائل الباب الأول فصل ١ـــ٣)

وبحل المعادلات (8) نصل إلى :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & e^t \\ 1 & 3 & 9 & 27 & e^{3t} \\ 0 & 1 & 6 & 27 & te^{3t} \\ 0 & 0 & 2 & 18 & t^2e^{3t} \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & e^t \\ 0 & 2 & 8 & 26 & e^{3t}-e^t \\ 0 & 1 & 6 & 27 & te^{3t} \\ 0 & 0 & 2 & 18 & t^2e^{3t} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & e^t \\ 0 & 1 & 6 & 27 & te^{3t} \\ 0 & 2 & 8 & 26 & e^{3t}-e^t \\ 0 & 0 & 2 & 18 & t^2e^{3t} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & e^t \\ 0 & 1 & 6 & 27 & te^{3t} \\ 0 & 0 & -4 & -28 & e^{3t}-e^t-2te^{3t} \\ 0 & 0 & 2 & 18 & t^2e^{3t} \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & e^t \\ 0 & 1 & 6 & 27 & te^{3t} \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -\frac{1}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{2}te^{3t} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & t^2e^{3t}+\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t-te^{3t} \end{array}\right]$$

وبالتالي يكون

$$4\alpha_3 = t^2e^{3t}+\frac{1}{2}e^{3t}-\frac{1}{2}e^t-te^{3t}$$
$$\alpha_2+7\alpha_3 = -\frac{1}{4}e^{3t}+\frac{1}{4}e^t+\frac{1}{2}te^{3t}$$
$$\alpha_1+6\alpha_2+27\alpha_3 = te^{3t}$$
$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = e^t$$

وبحل هذا النظام بطريقة الرجوع *Backward* فإننا نصل إلى قيم $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ ثم نُعوّض في المعادلة

$$e^{At} = \alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2+\alpha_3 A^3$$

وهذا الجهد متروك للقارئ وعليه أن يتأكد أنها نفس النتيجة السابق الحصول عليها مـــن الأســـلوب الأول للحل .

(٧) أوجد e^{At} للمصفوفة $A=\begin{bmatrix}1&1&3\\0&2&2\\0&0&2\end{bmatrix}$.

الحل :

القيم الذاتية : $\lambda_1=1 \quad , \quad \lambda_2=\lambda_3=2$

المتجهات الذاتية :

$$u_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$(A-2I)u_2=O \Rightarrow \begin{bmatrix}-1&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-b_1+2b_2=0\\ \\ 2b_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b_1=2b_2=2\alpha\\ \\ b_3=0\end{cases}$$

أي أننا يمكن أن نأخذ (باختيار $b_2=\alpha=1$) u_2 كالآتي :

$$u_2=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}$$

أي أن المصفوفة A غير شبه سهلة ولكنها غير منحلة *Non-Derogatory* أو بسيطة الإنحـــلال *Simple Degenerate* . وبالتالي يمكن حساب المتجه المُعمّم u_3 $\left(u_3=[v_1 \quad v_2 \quad v_3]^T\right)$ كالآتي :

$$Au_3=2u_3+u_2 \Rightarrow \begin{bmatrix}-1&2&3\\0&0&2\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-v_1+2v_2+3v_3=2\\ \\ 2v_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}v_1=2v_2-\frac{1}{2}\\ \\ v_3=\frac{1}{2}\end{cases}$$

أي أننا يمكن أن نأخذ (باختيار $v_2=\alpha=0$) u_3 كالآتي :

$$u_3=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

أو نأخذ

$$u_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

ولإيجاد e^{At} هناك أكثر من أسلوب :

الأسلوب الأول :

$$T=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad,\quad e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{t} & 0 & 0\\0 & e^{2t} & te^{2t}\\0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون

$$e^{At}=Te^{Jt}T^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{t} & 0 & 0\\0 & e^{2t} & te^{2t}\\0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{t} & 2\left(e^{2t}-e^{t}\right) & \left(4te^{2t}-e^{2t}+e^{t}\right)\\0 & e^{2t} & 2te^{2t}\\0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$$

الأسلوب الثاني :

دع

$$e^{At}=\alpha_0 I+\alpha_1 A+\alpha_2 A^2$$

إذن

$$e^{\lambda t}=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\alpha_2\lambda^2 \qquad (1)$$

وبالتفاضل بالنسبة لـــ λ :

$$te^{\lambda t}=\alpha_1+2\alpha_2\lambda \qquad (2)$$

وعند $\lambda=1$ (بالتعويض في (1)) :

$$e^{t}=\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \qquad (3)$$

وعند $\lambda=2$ (بالتعويض في (2) , (1)) :

$$e^{2t}=\alpha_0+2\alpha_1+4\alpha_2 \qquad (4)$$

$$te^{2t}=\alpha_1+4\alpha_2 \qquad (5)$$

والمعادلات (5) , (4) , (3) يمكن وضعها على الصورة المصفوفية الآتية :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{=H} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^{2t} \end{bmatrix} \qquad (6)$$

وبحل المعادلات (6) نصل إلى :

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2te^{2t} - 3e^{2t} + 4e^t \\ -3te^{2t} + 4e^{2t} - 4e^t \\ te^{2t} - e^{2t} + e^t \end{bmatrix}$$

وبالتعويض في المعادلة

$$e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$$

نحصل على

$$e^{At} = \left(2te^{2t} - 3e^{2t} + 4e^t\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \left(-3te^{2t} + 4e^{2t} - 4e^t\right)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ \left(te^{2t} - e^{2t} + e^t\right)\begin{bmatrix} 1 & 6 & 13 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

أي أن

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 2\left(e^{2t} - e^t\right) & \left(4te^{2t} - e^{2t} + e^t\right) \\ 0 & e^{2t} & 2te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

الأسلوب الثالث :

والآن دعنا نتبع الأسلوب العام الذي يستخدم نظرية كايلي ــ هاملتون مع المتجهات المُعمّمة . دع

$$e^{At} = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2$$

وبالتالي

$$e^{\lambda t} = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2$$

وبالتعويض عن $\lambda = 1$:

$$e^t = a_0 + a_1 + a_2 \qquad (1)$$

وعند $\lambda = 2$ (وبتكرارية جبرية $m = 2$) فإننا نصل إلى المعادلات التالية :

* **أولاً** : بالضرب في u_2 (حيث $Au_2 = 2u_2$) فإن

$$e^{2t} = a_0 + 2a_1 + 4a_2 \qquad (2)$$

* **ثانياً** : بالضرب في u_3 (حيث $Au_3 = 2u_3 + u_2$ وكذلك $A^2u_3 = (2)^2u_3 + (2)(2)u_2$)

فإن

$$\begin{aligned} e^{At}u_3 &= a_0u_3 + a_1Au_3 + a_2A^2u_3 \\ &= a_0u_3 + a_1(2u_3 + u_2) + a_2\left((2)^2u_3 + (2)(2)u_2\right) \\ &= (a_0 + 2a_1 + 4a_2)u_3 + (a_1 + 4a_2)u_2 \end{aligned}$$

ولكن

$$f(A)u_3 = f(\lambda)u_3 + f'(\lambda)u_2$$

(لماذا ؟) ، إذن

$$e^{At}u_3 = e^{2t}u_3 + te^{2t}u_2$$

وبالمقارنة :

$$e^{2t} = a_0 + 2a_1 + 4a_2$$

و

$$a_1 + 4a_2 = te^{2t} \qquad (3)$$

ومن المعادلات (3) , (2) , (1) فإننا نصل إلى المعادلات الخطية التالية :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}}_{=H} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ te^{2t} \end{bmatrix}$$

وهي نفس المعادلات السابق حلها في الأسلوب الثاني .. وبالتالي سوف تُعطي نفس النتائج .

٤-٧ مسائل على الباب الرابع

(١) إحسب : (أ) الحدودية الصغرى و (ب) دالة المصفوفة e^{At}

وذلك إذا كانت المصفوفة A تُعطى كالآتي :

(i) $A=\begin{bmatrix}5 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$

(ii) $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$

(iii) $A=\begin{bmatrix}1/\sqrt{8} & \sqrt{8} & 0\\ \sqrt{8} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$

(iv) $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$, $\theta=0,\pi/2$

(v) $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & 2 & 2\\ -4 & 2 & 5\end{bmatrix}$

(vi) $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

(vii) $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

(viii) $A=\begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 2 & -i & 0\\ 0 & 0 & i\end{bmatrix}$

(ix) $A=\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 2 & 5 & -6\\ -1 & -6 & 8\end{bmatrix}$

(x) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

(xi) $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

(xii) $A=\begin{bmatrix}17 & 0 & -25\\ 0 & 3 & 0\\ 9 & 0 & -13\end{bmatrix}$

(xiii) $A=\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right]$

(٢) أوجد الشرط على A , B حتى تتحقق العلاقة التالية :

$$e^{(A+B)} = e^{A}.e^{B}$$

(٣) إثبت صحة العلاقات التالية ذاكراً شرط الصحة إذا وُجِد :

(i) $\sin 2A = 2\sin A \cos A$ (ii) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

(iii) $\cos^2 A = \frac{1}{2}(I + \cos 2A)$ (iv) $\sin^2 A = \frac{1}{2}(I - \cos 2A)$

(٤) إثبت أن $\sin A, \cos A$ إبداليتان . (ما هو الشرط ؟)

(٥) متى يكون $\sin A.\sin B = \sin B.\sin A$ ؟ .

(٦) إثبت أن

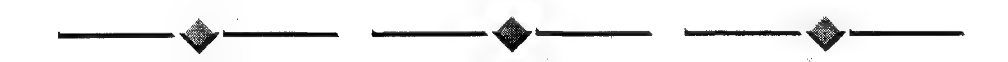
(i) $\frac{d}{dt}\left(e^{At}\right) = Ae^{At}$ (ii) $\int_0^t e^{At}\,dt = A^{-1}e^{At} - A^{-1}$

بشرط وجود A^{-1} .

(٧) أوجد $\sqrt{A}$ إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ واثبت أنها غير فريدة .

(٨) إثبت أنه إذا كانت القيم الذاتية لــ A لها أجزاء حقيقية سالبة ، فإن

$$\lim_{t \to \infty} e^{At} = O$$





تطبيقات

APPLICATIONS

الباب الخامس

تطبيقات
APPLICATIONS

٥-١ التطبيق الأول : حل معادلة التحكم التي على الصورة $\dot{x} = Ax + Bu$

٥-١-١ مقدمة

تُعتبر معادلة التحكم من أشهر المعادلات في علم **التحكم الهندسي** ***Engineering Control*** وذلك لأن نُظماً هندسية كثيرة يمكن وصفها بهذه المعادلة وخاصةً إذا تم اتباع طريقة **فراغ الحالة** ***State Space*** . وهذه المعادلة ما هي إلا وضع **معادلات خطية آنية تفاضلية من الرتبة الأولى** ***First Order Simultaneous linear Differential Equations*** في صورة مصفوفية . فإذا كان

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(t)x_j \quad , \quad i = 1,2,\cdots,n$$

(حيث $\frac{d}{dt} \equiv (\dot{})$) فإن هذه المعادلات الخطية يمكن وضعها في الصورة المصفوفية

$$\dot{x}(t) = A_{n\times n}(t)x_{n\times 1} + B_{n\times m}(t)u_{m\times 1}$$

حيث تُسمى (عادةً) :

A : مصفوفة الحالة *State Matrix*

B : مصفوفة التحكم *Control Matrix*

x : متجه فراغ الحالة *State Space Vector*

u : متجه التحكم *Control Vector*

t : ربما يمثل الزمن أو أي متغير آخر . وسوف نعتبر t ممثلاً للزمن إلا إذا نُص على خلاف ذلك .

فإذا كانت A دالة في الزمن t ، فإن النظم يُسمى بـــ النظم المتغير مع الزمن ***Time Variant System***
وإذا كانت A مصفوفة لا تعتمد على t فيكون النظم نظماً غير متغير مع الزمـــن ***Time Invariant System*** .

٥-١-٢ النظم غير المتغيرة مع الزمن *Time Invariant Systems* :

في هذه الحالة تكون المصفوفة A غير معتمدة على t . فإذا كان $t \geq 0$ وكان $x(0)$ هو متجه القيم الإبتدائية ***Initial Values*** ، فإن حل النظام يكون كالآتي :

نظرية

معادلة التحكم للنظم غير المتغير مع الزمن t لها الحل

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}y(\tau)d\tau$$

حيث $y(t) = Bu(t) \quad , \quad t \geq 0$

الإثبات :

أ ـــ إذا كانت A شبه سهلة *Semi-Simple* :

في هذه الحالة تكون

$$A = TD_\lambda T^{-1} \quad , \quad e^{At} = TD_{e^{\lambda t}}T^{-1}$$

دعنا نقوم بالتحويلة الخطية الآتية :

$$x = Tv \quad , \quad y(t) = Tu$$

إذن

$$\dot{x} = Ax + y \quad \Rightarrow \quad T\dot{v} = ATv + Tu \quad \Rightarrow \quad \dot{v} = \underbrace{\left(T^{-1}AT\right)}_{=D_\lambda}v + u$$

وبالتالي $\dot{v} = D_\lambda v + u$

والمعادلة الأخيرة معادلة بسيطة يمكن حلها لكل عناصر v .. أي أن

$$\dot{v}_i = \lambda_i v_i + u_i$$

وهي معادلة خطية لها الحل الآتي (حاول إثباته) :

$$v_i = e^{\lambda_i t} v_i(0) + e^{\lambda_i t} \int_0^t e^{-\lambda_i \tau} u_i(\tau) d\tau$$

وبالتالي يكون الحل في الصورة المصفوفية الآتية :

$$v = D_{e^{\lambda t}} v(0) + D_{e^{\lambda t}} \int_0^t D_{e^{-\lambda\tau}} u(\tau) d\tau$$

والآن بوضع

$$u = T^{-1} y \quad , \quad v = T^{-1} x$$

فإننا نصل إلى

$$T^{-1} x \doteq D_{e^{\lambda t}} T^{-1} x(0) + D_{e^{\lambda t}} \int_0^t D_{e^{-\lambda\tau}} T^{-1} y(\tau) d\tau$$

وبالضرب (من اليسار) في T:

$$x = \underbrace{T D_{e^{\lambda t}} T^{-1}}_{=e^{At}} x(0) + T D_{e^{\lambda t}} \underbrace{T^{-1} T}_{=I} \int_0^t D_{e^{-\lambda\tau}} T^{-1} y(\tau) d\tau$$

$$= e^{At} x(0) + \underbrace{T D_{e^{\lambda t}} T^{-1}}_{=e^{At}} \int_0^t \underbrace{T D_{e^{-\lambda\tau}} T^{-1}}_{=e^{-A\tau}} y(\tau) d\tau$$

$$= e^{At} x(0) + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} y(\tau) d\tau$$

وهو الحل المطلوب .

ب ــ إذا كانت A غير شبه سهلة *Non-Semi-Simple* :

في هذه الحالة يمكن حساب المتجهات المُعَمَّمة بحيث يكون

$$A = TJT^{-1} \quad , \quad e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

حيث T تحتوي على المتجهات المُعممة والمتجهات الذاتية للمصفوفة A و J هي شكل جوردان . وعند عمل نفس التحويلة الخطية

$$x = Tv, \quad , \quad y(t) = Tu$$

فإننا نصل إلى المعادلة التفاضلية

$$\dot{v} = Jv + u$$

وعند الحل لكل عنصر على حده مع اتباع أسلوب الرجوع *Backward* (إذا اضطررنا إلى ذلك .. أنظر *Deif A.S.*, 1982 , *p.*190) فإننا نصل إلى الحل نفسه وهو أن

$$x = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}y(\tau)d\tau$$

ملحوظة هامة :

يمكن تعميم النظرية السابقة إذا ما كانت $t \geq t_0$ كالآتي :

إذا كان $t \geq t_0$ **وكان** $x(t_0) = x_0$ **هو متجه القيم الإبتدائية** ***Initial Values*** **، فإن حل النظام**

$$\dot{x}(t) = Ax + y(t)$$

(حيث A مصفوفة ذات معاملات ثابتة) يكون كالآتي :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^t e^{-As}y(s)ds$$

ولإثبات ذلك: دع

$$\dot{x} - Ax(t) = y(t)$$

وبالضرب في e^{-At} (وهي موجودة دائماً) :

$$e^{-At}(\dot{x} - Ax(t)) = e^{-At}y(t)$$

ولكن

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}x\right) = e^{-At}\dot{x} + \left(-Ae^{-At}\right)x = e^{-At}\underbrace{(\dot{x} - Ax)}_{=y} = e^{-At}y(t)$$

حيث A, e^{-At} إبداليتان (اثبت ذلك) . وبتكامل العلاقة الأخيرة من $t = t_0$ إلى t :

$$e^{-At}x\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} e^{-As}y(s)ds \quad \Rightarrow \quad e^{-At}x - e^{-At_0}\underbrace{x(t_0)}_{=x_0} = \int_{t_0}^{t} e^{-As}y(s)ds$$

أي أن

$$e^{-At}x = e^{-At_0}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-As}y(s)ds$$

وبالضرب في e^{At} واستعمال أن $At, -At_0$ إبداليتان (أي $e^{At}.e^{-At_0} = e^{A(t-t_0)}$) نصل إلى :

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + e^{At}\int_{t_0}^{t} e^{-As}y(s)ds$$

مثال : حل النظام $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$.

الحل :

المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ متماثلة بالسالب *Skew-Symmetric* ، وبالتالي فإن حساب e^{At} سيكون سهلاً وهو

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix}d\tau = e^{At}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + e^{At}\begin{bmatrix} \int_0^t (\tau\cos\tau - \sin\tau)d\tau \\ \int_0^t (\tau\sin\tau + \cos\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

ويمكن للقارئ إكمال الحل .

مثال : حل المعادلات :

$$\dot{x} = x + 2y + \cos t \quad , \quad \dot{y} = 2x + y + \sin 2t \quad , \quad \dot{z} = 2z + 1$$

حيث $x(0) = y(0) = z(0) = 0$

الحل :

المعادلات السابقة يمكن وضعها في الصورة

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos t\\ \sin 2t\\ 1\end{bmatrix}\quad,\quad\begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\\z(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ويمكن حساب e^{At} كالآتي :

$$e^{At}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{3t}\right)&\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{3t}\right)&0\\ \frac{1}{2}\left(-e^{-t}+e^{3t}\right)&\frac{1}{2}\left(e^{-t}+e^{3t}\right)&0\\ 0&0&e^{2t}\end{bmatrix}$$

وبالتالي يكون الحل

$$\underline{x}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}=e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}\begin{bmatrix}\cos\tau\\ \sin 2\tau\\ 1\end{bmatrix}d\tau$$

وعلى القارئ أن يُكمل الحل .

مثال : إذا كانت A مصفوفة شبه سهلة وكل قيمها الذاتية لها جزء حقيقي سالب ، وكان E متجه ثابت ، أثبت أن القيمة النهائية *Steady State* للمتجه x الذي يحقق المعادلة $\dot{x}=Ax(t)+E$ هي $-A^{-1}E$.

ملحوظة : يُقال على النظم الموصوف بالمعادلة $\dot{x}=Ax(t)+E$ في هذه الحالة أنه مُستقر *Asymptotically Stable* .

الإثبات : قبل الإثبات المطلوب دعنا نثبت الثلاث نقاط الفرعية التالية والتي ستفيد في الإثبات المطلوب :

النقطة الفرعية الأولى : المصفوفتان A^{-1},e^{-At} إبداليتان *Commute* :

الإثبات : نعلم أن

$$e^{-At}=TD_{e^{-\lambda_i t}}T^{-1}$$

وأن

$$A^{-1} = TD_{1/\lambda}T^{-1}$$

وبالتالي

$$e^{-At}A^{-1} = TD_{e^{-\lambda_i t}}T^{-1}TD_{1/\lambda}T^{-1} = TD_{e^{-\lambda_i t}}D_{1/\lambda}T^{-1}$$

كذلك

$$A^{-1}e^{-At} = TD_{1/\lambda}T^{-1}TD_{e^{-\lambda_i t}}T^{-1} = TD_{1/\lambda}D_{e^{-\lambda_i t}}T^{-1} = TD_{e^{-\lambda_i t}}D_{1/\lambda}T^{-1} = e^{-At}A^{-1}$$

أي أن A^{-1}, e^{-At} إبداليتان .

النقطة الفرعية الثانية : $\lim_{t\to\infty} e^{At} = O$

الإثبات :

$$e^{At} = TD_{e^{\lambda_i t}}T^{-1} \quad \Rightarrow \quad \lim_{t\to\infty} e^{At} = T\lim_{t\to\infty} D_{e^{\lambda_i t}}T^{-1} = TOT^{-1} = O$$

وذلك لأن

$$\lim_{t\to\infty} e^{\lambda_i t} = 0 \quad , \quad \forall i$$

(لماذا ؟) وبالتالي فإنه (حتى يكون النظم مستقراً) يجب أن يكون $\lim_{t\to\infty} e^{At} = O$.

النقطة الفرعية الثالثة : $\int_0^t e^{-A\tau}d\tau = -A^{-1}\left(e^{At} - I\right)$.

الإثبات :

$$\int_0^t e^{-A\tau}d\tau = \int_0^t TD_{e^{-\lambda\tau}}T^{-1}d\tau = T\int_0^t D_{e^{-\lambda\tau}}d\tau = TD_{\int_0^t e^{-\lambda\tau}d\tau}T^{-1} = TD_{-\frac{1}{\lambda}\left(e^{-\lambda t}-1\right)}T^{-1}$$

$$= T\left[D_{\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right)}\right]T^{-1} = TD_{\frac{1}{\lambda}}T^{-1} - TD_{\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}}T^{-1} = A^{-1} - A^{-1}e^{-At} = -A^{-1}\left(e^{-At} - I\right)$$

وبعد الثلاث إثباتات الفرعية فإننا يمكننا إثبات هذه القاعدة الهامة في إستقرار النظم . نبدأ من حل النظام

$$\dot{x} = Ax + E$$

وهو

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}E\,d\tau = e^{At}x(0) + e^{At}\left(\int_0^t e^{-A\tau}\,d\tau\right)E$$

(لماذا ؟) ، إذن

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} x &= \lim_{t\to\infty} e^{At}x(0) + \lim_{t\to\infty} e^{At}\left(-A^{-1}\right)\left(e^{-At} - I\right)E \\
&= O - \lim_{t\to\infty} A^{-1}e^{At}\left(e^{-At} - I\right)E \\
&= O - \lim_{t\to\infty} A^{-1}\left(I - e^{-At}\right)E \\
&= O - A^{-1}(I - O)E \\
&= -A^{-1}E
\end{aligned}$$

وبذلك يثبت المطلوب .

ملاحظات :

(١) هذه القاعدة الهامة في إستقرار النظم تجعلنا نحل النظام في حالته المستقرة النهائية بدون متاعب كبيرة في الحسابات .. فمثلاً لو كانت $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$ وكان $E = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ فإن :

$$\lim_{t\to\infty} x = x_s = -A^{-1}E = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 3/4 \\ 7/5 \end{bmatrix}$$

ولا يتطلب هذا الحل جهداً إلا حساب A^{-1} . ويجب ملاحظة أنه كان يمكننا الحل من المعادلة الأصلية كالآتي :

$$\dot{x} = Ax + E$$

وعندما $t \to \infty$ فإن x يكون ثابتاً ، وبالتالي فإن $\dot{x} = 0$ .. أي أن $Ax + E = 0$ ، وبالتالي $x = -A^{-1}E$ وهذا يُعتبر إثبات للمسألة . ولكن لا يُوضح لماذا يجب أن تكون القيم الذاتية لـ A ذات جزء حقيقي سالب .

(٢) تُعتبر النتيجة التي يُعرضها هذا المثال سليمة دائماً سواء كانت A شبه سهلة أو غير شبه سهلة . وفي الحالة الأخيرة ستكون $A = TJT^{-1}$ ويكون $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$ ولكن المصفوفة e^{Jt} تحتوي على دوال مثل $e^{\lambda t}$ أو $t^k e^{\lambda t}$ وكلها تتقارب للصفر عندما $t \to \infty$ ، وبالتالي نصل إلى نفس النتيجة ؛ أن النظم الخطي يكون مستقراً إذا ما كان الجزء الحقيقي لكل القيم الذاتية سالباً .

(٣) إذا كانت λ موجبة أو لها جزء حقيقي موجب ، فإن $\|x\| \to \infty$ وذلك عندما $t \to \infty$ .. وبالتالي فهي حالة عدم إستقرار *Unstable* . أما إذا كانت λ تخيلية بحتة *Pure Imajinary* فإن النظم يتردد حول نقطة إتزانه .

مثال : المتجه $\hat{x}$ يُسمى بنقطة الإتزان *Equilibrium Point* (في فضاء المتجهات) للنظم $\dot{x} = f(x)$ إذا كان $f(\hat{x}) = O$ (أي أن ثابت $= \hat{x} = x$ هو حل للنظام) . برهن أن النظام $\dot{x} = f(x)$ عند $x = \hat{x}$ إذا ما كانت كل القيم الذاتية للجاكوبيان *Jacobian* $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{x=\hat{x}}$ لها جزء حقيقي سالب .

الإثبات :

النظم $\dot{x} = f(x)$ (خطي أو غير خطي) يكون له نقطة إتزان عند $x = \hat{x}$ إذا كان $f(\hat{x}) = O$. دعنا نفك الدالة $f(x)$ حول النقطة $x = \hat{x}$ (في فضاء المتجهات) مستعملين مفكوك تيلور *Taylor Expansion* . أي أن

$$f_i(x) = f_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x=\hat{x}} (x_j - \hat{x}_j) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(x_j - \hat{x}_i)(x_k - \hat{x}_i)\bigg|_{x=\hat{x}} + \cdots\cdots\cdots$$

وبكتابة هذا المفكوك في صورة متجهة :

$$f(x) = f(\hat{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} (x - \hat{x}) + \text{حدود غير خطية}$$

وإذا افترضنا أننا بقرب نقطة الإتزان (نقطة x قريبة من $\hat{x}$) فإن الحدود غير الخطية يمكن إهمالها . كذلك $f(\hat{x}) = O$ .. وبالتالي

$$f(x)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}(x-\hat{x})$$

وبالتالي تصبح معادلة النظام كالآتي :

$$\frac{d}{dt}(x)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}(x-\hat{x})$$

أو في صورة أخرى

$$\frac{d}{dt}(x-\hat{x})=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}(x-\hat{x}) \qquad \text{(لماذا ؟)}$$

والصورة الأخيرة هي معادلة النظم بعد جعلها خطية *Linearized Form* . أي أن $\dot{y}=Ay$ حيث

$$A=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}$$

وتُسمى بـــ **مصفوفة جاكوبيان** ***Jacobian Matrix*** أو **الجاكوبيان** . وكذلك :

$$y=x-\hat{x}$$

ويكون هذا النظام الخطي مُستقراً (كما في المثال السابق) عندما تكون كل القيم الذاتية لـــ A لهـــا جزء حقيقي ســـالب .. وبالتالي نصل إلى النتجة الهامة (والتي تُطبق على $f(x)$ خطيـــة أم لا) أن إستقرار النظام $\dot{x}=f(x)$ المتوازن عند $\hat{x}$ ($f(\hat{x})=0$) في النهاية بعد إضطرابه يكون مشـــــروطاً بكون كل القيم الذاتية للجاكوبيان $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}$ يكون لها جزء حقيقي سالب .

__كمثال__ توضيحي للمثال السابق ، إعتبر معادلة البندول المُخمّد (ذي الإعاقـــة) *Damped Pendulum* والذي يصنع مع الإتجاه الرأسي زاوية قدرها θ :

$$\ddot{\theta}+k_1\dot{\theta}+k_2\sin\theta=0$$

حيث k_1,k_2 هي ثوابت موجبة ، و θ هي الزاوية التي يصنعها البندول عند تأرجحه حول نقطة إتزانه الأولى $(\theta=0)$.

دع $\qquad x_1=\theta \quad , \quad x_2=\dot{\theta}$

وبالتالي فإن

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta} = -k_1\dot{\theta} - k_2 \sin\theta = -k_1 x_2 - k_2 \sin x_1$$

أي أن

$$\frac{d}{dt}x_1 = x_2$$
$$\frac{d}{dt}x_2 = -k_1 x_2 - k_2 \sin x_1$$

أو بتعبير آخر

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sin x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -k_1 x_2 - k_2 \sin x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = f(x_1, x_2)$$

* والآن نحسب نقط الإتزان $f(x) = O$:

$$f(x) = O \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{matrix} \sin x_1 = \sin\theta = 0 \Rightarrow x_1 = \theta = n\pi, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ x_2 = \dot{\theta} = 0 \end{matrix} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} n\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

* ثم نحسب الجاكوبيان $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}$:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\hat{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 \cos\hat{x}_1 & -k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 \cos n\pi & -k_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_2 & -k_1 \end{bmatrix} & n \text{ even} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_2 & -k_1 \end{bmatrix} & n \text{ odd} \end{cases}$$

* ولحساب القيم الذاتية للجاكوبيان $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}}$: .

$$\left| \lambda I - \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\hat{x}} \right| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ k_2 \cos n\pi & \lambda + k_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 + k_1\lambda + k_2 \cos n\pi = 0$$

وبالتالي فإن

$$\lambda_{1,2}=\frac{-k_1\pm\sqrt{k_1^2-4k_2\cos n\pi}}{2}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda_1=\dfrac{-k_1}{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{k_1^2-4k_2\cos n\pi}\\ \lambda_2=\dfrac{-k_1}{2}-\dfrac{1}{2}\sqrt{k_1^2-4k_2\cos n\pi}\end{cases}$$

فإذا كان :

(أ) $\boxed{k_1^2=4k_2\cos n\pi}$

يكون التظام مستقراً وهذا يحدث عندما تكون n عدد **زوجي *Even*** أو صفر .. وفي كل الأحوال فهو وضع الإتزان الأول $(\theta=0)$.

(ب) $\boxed{k_1^2>4k_2\cos n\pi}$

يكون التظام مستقراً وذلك عندما يكون

$$\text{Re}(\lambda_1)<0\quad\Rightarrow\quad k_1>\sqrt{k_1^2-4k_2\cos n\pi}$$
$$\Rightarrow\quad k_1^2>k_1^2-4k_2\cos n\pi\Rightarrow\cos n\pi>0$$

وهذا بدوره يحدث عندما تكون n عدد زوجي أو صفر .. وهو نفس الشرط السابق في (أ) ولكن مع اشتراط أن :

$$\boxed{k_1^2>4k_2}$$

(ج) $\boxed{k_1^2<4k_2\cos n\pi}$

يكون النظام مستقراً لأن

$$\text{Re}(\lambda_1)=\frac{-k_1}{2}<0$$

وبالتالي يحدث إستقرار عندما تكون n عدد زوجي أو صفر أيضاً .

إذن الشرط العام للإستقرار هو عندما تكون n عدد زوجي *Even* أو صفر ، وبالتالي فعندما تكون n عدد **فردي *Odd*** فإن (أ) لا يمكن تحققها وكذلك (ب) لا يمكن تحققها (لأن $\cos n\pi<0$) وأيضاً (ج) لا يمكن تحققها .. وبالتالي فإنه عندما تكون n فردية فإن النظم

يكون غير مستقر وهذا ظاهر من وضع البندول عندما تكون $\theta = \pi$ .. في هذه الحالة فإن البنـــدول يُصبح رأسياً لأعلى ولا يمكن له أن يستقر على هذا الحال .

٥-١-٣ النظم المتغيرة مع الزمن Time Variant Systems

في هذه الحالة تكون المصفوفة A معتمدة على t ؛ أي أن $A = A(t)$ وبالتالي فإن المسألة تُصاغ على الصورة

$$\dot{x} = A(t)x(t) + y \quad , \quad x(t_0) = x_0$$

تعريف :

إذا كان $\dot{x} = A(t)x(t)$ فإنه تُوجد مصفوفة $\Phi(t,t_0)$ لها الخـــواص الآتية

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0) = A(t)\Phi(t,t_0) \qquad \text{(i)}$$

$$\Phi(t_0,t_0) = I \qquad \text{(ii)}$$

وتُسمى المصفوفة $\Phi(t,t_0)$ بـــ المصفوفة الأساســـية *Fundamental Matrix* وأحياناً مصفوفة الإنتقال *Transition Matrix* .

ولإثبات أن هذه المصفوفة **موجودة وفريدة** نستعير ذلك من (*Bronson R.*, 1970 , *p.* 94) . دع

$$\dot{x}_j = A(t)x_j(t) \quad , \quad x_j(t_0) = e_j \quad , \quad \forall\ j = 1,2,\cdots,n \qquad (1)$$

حيث

$$e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\ \vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1} \quad , \quad e_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\ \vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1} \quad , \quad \cdots \quad , \quad e_j = \begin{bmatrix}0\\ \vdots\\1\\ \vdots\\0\end{bmatrix}_{n\times1} \leftarrow j^{th}\text{component} \quad , \quad e_n = \begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\ \vdots\\1\end{bmatrix}_{n\times1}$$

أي أن المجموعة $\{e_j\}$ هي المتجهات الأولية *Elementary Vectors* .

والنظم (1) من المعادلات له حل فريد . دع هذا الحل هو $x_j(t)$. كذلك دع

$$\Phi(t,t_0) = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]$$

وبالتالي

$$\Phi(t_0,t_0)=[x_1(t_0) \quad x_2(t_0) \quad \cdots \quad x_n(t_0)]=[e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n]=I$$

كذلك

$$\frac{d\Phi(t,t_0)}{dt}=[\dot{x}_1 \quad \dot{x}_2 \quad \cdots \quad \dot{x}_n]=[Ax_1 \quad Ax_2 \quad \cdots \quad Ax_n]=A[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]=A\Phi(t,t_0)$$

وبالتالي $\Phi(t,t_0)$ لها الخواص السابق ذكرها في التعريف .

ولإثبات الإنفراد *Uniqueness* ، دع $\Psi(t,t_0)$ مصفوفة أخرى تحقق نفس الخواص السابق ذكرها والتي تحققها المصفوفة $\Phi(t,t_0)$. إذن العمود رقم j في المصفوفة $\Psi(t,t_0)$ يجب أن يحقق المعادلة التفاضلية ذات الشروط الإبتدائية $x_j(t_0)=e_j$. ولكن الحل لهذا النظم فريد كما سبق وذكرنا ذلك ، ومن ثم فإن العمود j يجب أن يكون $x_j(t)$ ؛ أي هو العمود رقم j في المصفوفة $\Phi(t,t_0)$ .. وبالتالي فإن $\Psi(t,t_0)=\Phi(t,t_0)$ .. أي أن $\Phi(t,t_0)$ مصفوفة فريدة .

ملحوظات هامة :

(١) لاحظ أن $\Phi(t,t_0)$ تعود لتصبح $e^{A(t-t_0)}$ وذلك إذا كانت A ذات معاملات ثابتة (أي إذا كان النظام غير متغير مع الزمن *Time Invariant System*) لأن :

$$\frac{d}{dt}e^{A(t-t_0)}=\frac{d}{dt}\left(e^{At}.e^{-At_0}\right)=Ae^{At}e^{-At_0}=Ae^{A(t-t_0)}$$

إذن

$$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$$

ولا يمكن أن تكون أي شيء آخر (لماذا ؟) .

(٢) من المفيد أن نقول أن حدودنا في حل هذا النظم (أي عندما تكون $A=A(t)$) تقف عند إثبات وجود الحل وإنفراده . ولكن هل الحل هو $\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)}$ في هذه الحالة ؟ . لا .. ولا يمكننا إيجاده كصيغة مغلقة *Closed Form* .. إننا فقط بهذه النظرية نقف على أرضٍ ثابتة لنقول أن **الحل موجود وفريد** .

نظرية :

الحل الفريد للمعادلة $(\dot{x}=A(t)x(t) \ , \ x(t_0)=c)$ **هو :**

$$\boxed{x(t)=\Phi(t,t_0)c}$$

الإثبات :

أولاً : في حالة ما إذا كانت A مصفوفة ذات معاملات ثابتة :

$$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad x(t)=e^{A(t-t_0)}c$$

كما سبق وبيّنا .

ثانياً : في حالة ما إذا كانت A مصفوفة دالة في t :

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}\Phi(t,t_0)c=A(t)\underbrace{\Phi(t,t_0)c}_{=x}=A(t)x(t)$$

كذلك (من التعريف) : $x(t_0)=\Phi(t_0,t_0)c=I.c=c$

خواص المصفوفة الأساسية :

(i) خاصية الإنتقال *Transposition Property* : $\boxed{\Phi(t,\tau)\Phi[\tau,t_0]=\Phi(t,t_0)}$

وللإثبات أنظر (*Bronson R.*, 1970, *p.* 167)

(ii) $\boxed{[\Phi[t,t_0]]^{-1}=\Phi(t_0,t)}$ وهذه يمكن إثباتها بشكل مباشر من (i) حيث :

$$\Phi(t_0,\tau)\Phi(\tau,t_0)=\Phi(t_0,t_0)=I$$

وبالتالي فإن : $[\Phi[t,t_0]]^{-1}=\Phi(t_0,t)$

(iii) $\boxed{|\Phi(t,t_0)|=e^{\int_{t_0}^{t} tr(A(t))dt}}$ وللإثبات أنظر المرجع المُشار إليه في (i) .

نظرية :

إذا كان $(\dot{x}=A(t)x(t)+y(t)\,,\,x(t_0)=c)$ فإن الحل الفريد هو :

$$\boxed{x(t)=\Phi(t,t_0)c+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)y(s)ds}$$

الإثبات :

أولاً : في حالة ما إذا كانت A مصفوفة ذات معاملات ثابتة :

$$\Phi(t,t_0)=e^{A(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad x(t)=\Phi(t,t_0)c+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)y(s)ds$$

كما سبق وبينا .

ثانياً : في حالة ما إذا كانت A مصفوفة دالة في t :

باستخدام الخاصية (i) من خواص المصفوفة الأساسية ، فإن

$$\Phi(t,s)=\Phi(t,t_0)\Phi(t_0,s)$$

وبالتالي فإنه يمكن كتابة الحل كالآتي :

$$x(t)=\Phi(t,t_0)c+\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,s)y\,ds$$

وعند $t=t_0$ فإن

$$x(t_0)=\underbrace{\Phi(t_0,t_0)}_{=I}c+\underbrace{\Phi(t_0,t_0)\int_{t_0}^{t_0}\Phi(t_0,s)y\,ds}_{=O}=I.c=c$$

أي أن الحل يُحقق الشروط الإبتدائية . والآن بتفاضل الطرفين في الحل المزعوم فإن

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\Phi(t,t_0)c+\int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)y(s)ds\right]$$

$$=\frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)]c+\frac{d}{dt}[\Phi(t,t_0)]\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,s)y(s)ds+\Phi(t,t_0)\frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,s)y(s)ds\right]$$

$$=A(t)\Phi(t,t_0).c+A(t)\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,s)y(s)ds+\Phi(t,t_0)\underbrace{\Phi(t_0,t)}_{=\Phi^{-1}(t,t_0)}y$$

وباستخدام الخاصية (ii) من خواص المصفوفة الأساسية :

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\underbrace{\left[\Phi(t,t_0)c+\Phi(t,t_0)\int_{t_0}^{t}\Phi(t_0,s)y(s)ds\right]}_{=x(t)}+\underbrace{\Phi(t,t_0)\Phi^{-1}(t,t_0)}_{=I}y$$

$$=A(t)x(t)+y$$

أي أن x تُحقق المعادلة التفاضلية .

ملحوظة هامة :

يُلاحظ القارئ أنه يمكننا عن طريق خواص المصفوفة الأساسية معرفة الكثير عن خواص الحل (رغم عدم استطاعتنا معرفة الحل نفسه) . وفي بعض الحالات يمكننا تخمين الحل . كذلك لابد من ذكر أن كلاً من $A(t),y(t)$ لابد أن يكونا متصلين على فترة تحتوي على t_0 .. في هذه الحالـــة نضمـــن وجود حل متصل وفريد .

تمرين (١) للقارئ :

وضح أن

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}\cos\left(\frac{t^2-t_0^2}{2}\right) & \sin\left(\frac{t^2-t_0^2}{2}\right)\\ -\sin\left(\frac{t^2-t_0^2}{2}\right) & \cos\left(\frac{t^2-t_0^2}{2}\right)\end{bmatrix}$$

هي المصفوفة الأساسية للنظم $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & t\\ -t & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

تمرين ٢ للقارئ :

كتعميم للتمرين ١ ، وضح أن

$$\Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix}\cos\int_{t_0}^{t}g(s)ds & \sin\int_{t_0}^{t}g(s)ds\\ -\sin\int_{t_0}^{t}g(s)ds & \cos\int_{t_0}^{t}g(s)ds\end{bmatrix}$$

هي المصفوفة الأساسية للنظم $\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & g(t)\\ -g(t) & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

٥-١-٣-١ المتريزنت Matrizant

إذا كانت : $\dot{x} = A(t)x(t) + y(t)$.

في هذه الحالة تكون القيم الذاتية للمصفوفة A دوال في الزمن t وتكون الصعوبة هي الميزة العامة لمثل هذا النوع من المسائل ، إلا في بعض الحالات الخاصة . ولكن كيف نستطيع تقديم حلاً لهذا النظم . دعنا نُعرض ما قدمه (Deif A.S., 1982) في كتابه الشيق . يعتمد الحل على طريقة تكرارية كالآتي :

$$\int_0^t \dot{x}\,dt = \int_0^t \big(A(\tau)x + y(\tau)\big)d\tau \quad \Rightarrow \quad x(t) - x(0) = \int_0^t \big(A(\tau)x + y(\tau)\big)d\tau$$

وبالتالي :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \big(A(\tau)x + y(\tau)\big)d\tau$$

وبالتعويض عن x من العلاقة السابقة نصل إلى تكرارٍ آخر :

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \left(A(\tau) \left(x(0) + \int_0^t \big(A(s)x + y(s)\big)ds \right) + y(\tau) \right) d\tau$$

وبالإستمرار على هذا النحو (وهو عمل مُمِل مضطرين له) نصل إلى :

$$x(t) = \left(I + \int_0^t A(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(s)ds\,d\tau + \int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(s)\int_0^s A(z)\,dz\,ds\,d\tau + \cdots\cdots \right)x(0)$$
$$+ \int_0^t y(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)\int_0^\tau y(s)ds\,d\tau + \int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(s)\int_0^s y(z)dz\,ds\,d\tau + \cdots\cdots$$

والآن نُعرف المتريزينت **Matrizant** للمعادلة التفاضلية كالآتي :

$$\text{Matrizant } M(t) = I + \int_0^t A(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(s)ds\,d\tau + \int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(s)\int_0^s A(z)dz\,ds\,d\tau + \cdots\cdots \to \infty$$

وبالتالي نصل إلى

$$x(t) = M(t)x(0) + M(t)\int_0^t M^{-1}(z)y(z)dz$$

وأحيل القارئ إلى المرجع السابق لإثبات أن $M(t)$ متقاربة لجميع قيم t وأن M^{-1} موجودة .

مثال : حل المعادلات

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$M(t) = I + \int_0^t A(\tau)d\tau + \int_0^t A(\tau)\int_0^\tau A(s)ds\,d\tau + \cdots\cdots\cdots \to \infty$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \int_0^t A(\tau)\begin{bmatrix} \tau & \tau \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{bmatrix}d\tau + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \tau \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tau & \tau \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^2 \end{bmatrix}d\tau + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \tau & \tau + \frac{1}{2}\tau^2 \\ 0 & \frac{1}{2}\tau^3 \end{bmatrix}d\tau + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & \frac{1}{8}t^4 \end{bmatrix} + \cdots\cdots\cdots$$

وبالتالي فإن

$$M(t)x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & t \\ 0 & \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & \frac{1}{8}t^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t \\ \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t^2 + \frac{1}{6}t^3 \\ \frac{1}{8}t^4 \end{bmatrix} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + 2t + t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots\cdots \\ 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

ويكون الحل :

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 + 2t + t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \cdots\cdots \\ 1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{8}t^4 + \cdots\cdots\cdots \end{bmatrix}$$

وللحصول على عدد كافي من حدود المتسلسلة (المتقارِبة) لجميع قيم t (لأن M متقاربة لجميع قيم t) فإننا نواصل الحسابات المُمِلة حتى نحصل على الحل .

٥-١-٤ حل المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة n والدرجة الأولى :

n^{th} Order Ordinary Differential Equation :

في هذا الفصل نناقش كيفية حل المعادلة التفاضلية العادية من الرتبة n والتي تأخذ الصيغة العامة

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) y^{(i)}(t) = F(t)$$

حيث $a_0 , a_n \neq 0$ ، $y^{(i)} = \dfrac{d^{(i)}y}{dt^{(i)}}$.

لحل هذا النوع من المعادلات فإننا نستفيد من نظرية المصفوفات في حل هذه المشكلة بالشكل الآتي :

دع

$$x_1 = y \quad , \quad x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y} \quad , \quad x_3 = \dot{x}_2 = \ddot{y} \quad , \quad \cdots\cdots, x_n = \dot{x}_{n-1} = y^{(n-1)}$$

فنحصل على :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ومن المعادلة التفاضلية نحصل على :

$$y^{(n)} = \dot{x}_n = -\frac{1}{a_n}\sum_{i=0}^{n-1} a_i x_{i+1} + \frac{1}{a_n}F(t) \qquad (2)$$

والمعادلات (2) , (1) يمكن وضعها في الصورة المصفوفية :

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=x}}_{=\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ \dfrac{-a_0}{a_n} & \dfrac{-a_1}{a_n} & \dfrac{-a_2}{a_n} & \cdots & \dfrac{-a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{=A(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{=x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \dfrac{F(t)}{a_n} \end{bmatrix}}_{=u(t)}$$

وبالتالي نعود للمشكلة $\dot{x} = A(t)x + u(t)$ ويكون الحل للمعادلة التفاضلية هو $y = x_1$.

حالة المعاملات الثابتة :

في هذه الحالة نصل إلى المعادلة التفاضلية المتجهة

$$\dot{x} = Ax + u(t)$$

* نوجد القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ للمصفوفة A ونعوض في المعادلة الذاتية :

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i = 0$$

(أي بالتعويض عن λ^i بدلاً من $y^{(i)}(t)$ في المعادلة التفاضلية الأصلية) ويمكن إثبات أن المعادلة الذاتية تأخذ الشكل السابق كالآتي : من المعادلة الذاتية

$$|\lambda I - A| = 0$$

وفك المحدد الناتج :

$$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ \frac{a_0}{a_n} & \frac{a_1}{a_n} & \frac{a_2}{a_n} & \frac{a_3}{a_n} & \cdots & \left(\lambda + \frac{a_{n-1}}{a_n}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & (a_n\lambda + a_{n-1}) \end{vmatrix} = 0$$

وبالفك من الصف الأخير :

$$a_0 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix} - a_1 \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \end{vmatrix} +$$

$$\cdots\cdots\cdots + a_{n-2}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} + \left(a_n\lambda + a_{n-1}\right)\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0(-1)^{n-1} + (-1)\lambda a_1(-1)^{n-2} + \cdots\cdots + (-1)^{n-2}\lambda^{n-2}a_{n-2}(-1) + (-1)^{n-1}\lambda^{n-1}\left(a_n\lambda + a_{n-1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0(-1)^{n-1} + \lambda a_1(-1)^{n-1} + \cdots\cdots + \lambda^{n-2}a_{n-2}(-1)^{n-1} + \lambda^{n-1}\left(a_n\lambda + a_{n-1}\right)(-1)^{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_0 + \lambda a_1 + a_2\lambda^2 + \cdots\cdots + \lambda^{n-2}a_{n-2} + \lambda^{n-1}\left(a_n\lambda + a_{n-1}\right) = 0$$

أي أن

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i = 0$$

* ثم نحسب المتجه الذاتي u_i المصاحب للقيمة الذاتية λ_i كالآتي :

$$u_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

ويمكن إثبات ذلك كالآتي :

$$(\lambda_i I - A)u_i = O \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_i & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}}_{=u_i} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي نحصل على

$$\left.\begin{matrix} \lambda i v_1 - v_2 = 0 \\ \lambda i v_2 - v_3 = 0 \\ \lambda i v_3 - v_4 = 0 \\ \vdots \\ \lambda i v_{n-1} - v_n = 0 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \begin{cases} v_2 = \lambda_i v_1 \\ v_3 = \lambda_i v_2 = \lambda_i^2 v_1 \\ v_4 = \lambda_i v_3 = \lambda_i^3 v_1 \\ \vdots \\ v_n = \lambda_i v_{n-1} = \lambda_i^{n-1} v_1 \end{cases}$$

أي أن

$$u_i = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix} \xrightarrow{v_1=1} u_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \vdots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}$$

ولكن هل تتحقق المعادلة الأخيرة ؟ . دعنا نتحقق من ذلك ..

$$a_0 v_1 + a_1 v_2 + a_2 v_3 + \cdots\cdots + a_{n-2} v_{n-1} + (a_n \lambda_i + a_{n-1}) v_n = 0$$

أي أن

$$a_0 + a_1 \lambda_i + a_2 \lambda_i^2 + \cdots\cdots + a_{n-2} \lambda_i^{n-2} + (a_n \lambda_i + a_{n-1}) \lambda_i^{n-1} = 0$$

وبالتالي

$$a_0 + a_1 \lambda_i + a_2 \lambda_i^2 + \cdots\cdots + a_{n-2} \lambda_i^{n-2} + a_{n-1} \lambda_i^{n-1} + a_n \lambda_i^n = 0$$

وهي المعادلة الذاتية كما حصلنا عليها سابقاً .

مثال : حل المعادلة $(\ddot{y} - y = \sinh t)$.

الحل :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \sinh t \end{bmatrix}$$

أي أن

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$$

وبالتالي

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

وتكون المصفوفة الظاهرية هي

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

وبحساب e^{At} :

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$$

يكون الحل :

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}u(\tau)d\tau \quad , \quad u(\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sinh \tau \end{bmatrix}$$

وفي النهاية يكون

$$y(t) = x_1(t) = y(0)\cosh t + \dot{y}(0)\sinh t + \tfrac{1}{2}\cosh t\left(t - \tfrac{1}{2}\sinh 2t\right) + \tfrac{1}{4}\sinh t\left(\cosh 2t - 1\right)$$

مثال : حل المعادلة $\left(\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = q \ , \ x, q \in R^n\right)$.

الحل :

بوضع

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = \dot{y}_1 = \dot{x}$$

نحصل على

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad , \quad \dot{y}_2 = q - Ay_2 - By_1$$

أو

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} O & I \\ -B & -A \end{bmatrix}}_{\Psi} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} O \\ q \end{bmatrix}}_{Q}$$

وهي صورة المعادلات $\dot{z} = \Psi z + Q$ حيث

$$z, Q \in R^{2n} \quad , \quad z = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

وتكون المعادلة الذاتية هي

$$\begin{vmatrix} \lambda I & -I \\ B & \lambda I + A \end{vmatrix} = 0$$

أو (أنظر مثال ١٤ ص ٦٠) : $\left|\lambda^2 I + \lambda A + B\right| = 0$

(من درجة $2n$) . ويكون المتجه الذاتي u الخاص بـ λ_i هو

$$\left[\begin{array}{c|c} \lambda_i I & -I \\ \hline B & \lambda_i I + A \end{array}\right] \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix}}_{=u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_i u_1 - u_{n+1} = 0 \\ \lambda_i u_2 - u_{n+2} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_i u_n - u_{2n} = 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = \lambda_i u_1 \\ u_{n+2} = \lambda_i u_2 \\ \vdots \\ u_{2n} = \lambda_i u_n \end{array}\right.$$

أي أن

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \hdashline u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \hdashline \lambda_i u_1 \\ \lambda_i u_2 \\ \vdots \\ \lambda_i u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ \hdashline \lambda_i u^{(1)} \end{bmatrix} \quad , \quad , u^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

أو في صورة أخرى

$$Bu^{(1)} + (\lambda_i I + A)u^{(2)} = O \Rightarrow Bu^{(1)} + (\lambda_i I + A)\lambda_i u^{(1)} = O \Rightarrow (\lambda_i^2 I + \lambda_i A + B)u^{(1)} = O$$

وهذه المعادلة لها حل غير صفري إذا كان $|\lambda^2 I + \lambda A + B| = 0$ وهي نفس النتيجة السابقة .

<u>كذلك</u> علينا تكملة تعميم هذه النتيجة كالآتي : إذا كان

$$\dddot{x} + A\ddot{x} + B\dot{x} + Cx = q \quad , \quad x, q \in R^n$$

(مع ملاحظة أن مُعامل $\dddot{x}$ الوحدة) فبوضع

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = \dot{y}_1 = \dot{x} \quad , \quad y_3 = \dot{y}_2 = \ddot{x}$$

نحصل على

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad , \quad \dot{y}_2 = y_3 \quad , \quad \dot{y}_3 = q - Ay_3 - By_2 - Cy_1$$

أو

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{z}} = \underbrace{\begin{bmatrix} O & I & O \\ O & O & I \\ -C & -B & -A \end{bmatrix}}_{\Psi} \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}}_{z} + \underbrace{\begin{bmatrix} O \\ O \\ q \end{bmatrix}}_{Q}$$

وهي صورة المعادلات $\dot{z} = \Psi z + Q$ حيث :

$$z, Q \in R^{3n} \quad , \quad z = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

وتكون المعادلة الذاتية هي

$$\left| \lambda^3 I + \lambda^2 A + \lambda B + C \right| = 0$$

(من درجة $3n$) . وينتج المتجه الذاتي u الخاص بـــ λ_i من حل المعادلات

$$\begin{bmatrix} \lambda_i I & -I & O \\ O & \lambda_i I & -I \\ C & B & \lambda_i I + A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ u^{(2)} \\ u^{(3)} \end{bmatrix} = O$$

وبالتالي

$$\left.\begin{matrix} \lambda_i u^{(1)} - u^{(2)} = 0 \\ \lambda_i u^{(1)} - u^{(2)} = 0 \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow \begin{cases} u^{(2)} = \lambda_i u^{(1)} \\ u^{(3)} = \lambda_i u^{(2)} = \lambda_i^2 u^{(1)} \end{cases}$$

أي أن

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \\ \vdots \\ u_{2n} \\ u_{2n+1} \\ u_{2n+2} \\ \vdots \\ u_{3n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \\ \lambda_i u_1 \\ \lambda_i u_2 \\ \vdots \\ \lambda_i u_n \\ \lambda_i^2 u_1 \\ \lambda_i^2 u_2 \\ \vdots \\ \lambda_i^2 u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{(1)} \\ \lambda_i u^{(1)} \\ \lambda_i^2 u^{(1)} \end{bmatrix} \quad , \quad u^{(1)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

أو في صورة أخرى :

$$Cu^{(1)} + Bu^{(2)} + (\lambda_i + A)u^{(3)} = 0$$

أي أن :

$$(C + \lambda_i B + \lambda_i^2 A + \lambda_i^3 I)u^{(1)} = 0$$

وهذه المعادلة لها حل غير صفري إذا كان $|\lambda^3 I + \lambda^2 A + \lambda B + C| = 0$ وهي نفس النتيجة السابقة .

وهكذا يمكن تعميم نتيجة هذا المثال .

٥-٢ التطبيق الثاني : المصفوفات العشوائية

STOCHASTIC MATRICES

في نظرية الاحتمالات ينتقل نظم من حالة *State* إلى حالة أخرى بمنظومة من الاحتمالات بين هذه الحالات ، حالة فأخرى على الترتيب . فإذا ما كان هناك إمكانية لـ n من الحالات فإن احتمال الانتقال من الحالة s_j إلى الحالة s_i تُعطى بالعنصر a_{ij} في **مصفوفة الإنتقالات العشوائية** ***Stochastic Transition Matrix A*** . والاحتمالات المقترنة بـ n من الحالات في أي وقت يمكن وضعها كـ **متجه احتمالي** ***Probability Vector*** :

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$$

حيث p_i يُعطي الإحتمال في أن يكون النظم في الحالة s_i . وحيث أن p_i, a_{ij} تُمثل إحتمالات ، فلابد أن تُحقق الآتي :

$$\boxed{\begin{array}{l} 0 \le a_{ij} \le 1 \\ 0 \le p_i \le 1 \\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 , \forall j \end{array}}$$

وبالتالي يمكن تعريف المصفوفة العشوائية على أنها مصفوفة كل قيم عناصرها واقعـــة بـــين الصفـــر والواحد وأن مجموع عناصر كل عمود من أعمدتها يجب أن يكون الوحدة .

ولتوضيح ذلك دعنا نأخذ حالة الطقس الآتية (مأخوذ من *Goult* , 1978 , *p*.159) :

حالة s_1 : مُشمسة *sunny*

حالة s_2 : غائمة yduolc

حالة s_3 : مُمطرة *rainy*

وتكون كل محاولة *Trial* أو تجربة *Experiment* هي التحول من حالة يومية إلى أخـــرى . ولنـــدع مصفوفة الإنتقال العشوائي هي

$$
\begin{array}{cccc}
 & s_1 & s_2 & s_3 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
A = & \left[\begin{array}{ccc} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \leftarrow s_1 \\ \leftarrow s_2 \\ \leftarrow s_3 \end{array}
\end{array}
$$

في هذا المثال يصف العنصر a_{12} (والذي يُساوي هنا 0.2) إحتمال الإنتقال من يومٍ غائمٍ (s_2) إلى يومٍ تالٍ مشمس (s_1) . وبالتالي فإذا كانت حالة الطقس في يومٍ ما تُعطى بالمتجه p ، فـــإن حالـــة الطقس في اليوم التالي لهذا اليوم تُعطى بالتحويل الخطي Ap ، وبعد يومين بـــ A^2p ، وبعـــد k مـــن الأيام بـــ A^kp . فمثلاً إذا كان

$$p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(أي يوم ممطر) فإن إحتمالات حالة الطقس في اليوم التالي ستكون

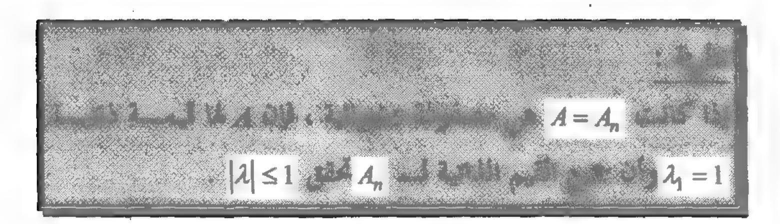
$$Ap = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

(أي يوم مشمس بإحتمال قدره 0.3 ويوم غائم بإحتمال قدره 0.3 ويوم ممطر بإحتمال قدره 0.4 ..

وبعد يومين فإن إحتمالات حالة الطقس في اليوم التالي ستكون

$$A^2 p = \begin{bmatrix} 0.33 \\ 0.33 \\ 0.34 \end{bmatrix}$$

وهكذا . لاحظ الخاصية المميزة لهذه المصفوفات .



الإثبات :

A مصفوفة عشوائية ، إذن

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad , \quad \forall j$$

والآن خذ المصفوفة

$$\widetilde{A} = A - I$$

فإن كل عمود في $\widetilde{A}$ يحقق

$$-1 + \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0$$

إذن المصفوفة $\widetilde{A}$ مصفوفة شاذة (لأن هناك إعتمادية بين أعمدتها ولأن $|A - I| = 0$) (وعلى القارئ الرجوع لخواص المحددات لإثبات ذلك) . وكمشكلة قيم ذاتية فإن هذا معناه أن المصفوفة $(A - I)$ لها إحدى القيم الذاتية على الأقل صفر .. وبالتالي بالنسبة للمصفوفة A فإن $\lambda = 1$.

ولإثبات الجزء الثاني :

من المعلوم أن القيم الذاتية لـ A هي نفسها القيم الذاتية لـ A^T ، وبالتالي دع

$$A^T v = \lambda v$$

وافترض أنه يوجد عنصر في v (وليكن v_m) بحيث أنه الأكبر في القيمة العددية *Largest in Magnitude* . أي أن

$$|v_m| \geq |v_i| \quad , \quad \forall i$$

والمعادلة رقم m في المعادلات $A^Tv=\lambda v$ تعطينا :

$$\lambda v_m = a_{1m}v_1 + a_{2m}v_2 + a_{3m}v_3 + \cdots\cdots\cdots + a_{nm}v_n$$

وهذا يعطي

$$|\lambda||v_m| \le a_{1m}|v_1| + a_{2m}|v_2| + \cdots + a_{nm}|v_n| \le a_{1m}|v_m| + a_{2m}|v_m| + \cdots + a_{nm}|v_m|$$

وبالتالي فإن

$$|\lambda| \le a_{1m} + a_{2m} + \cdots\cdots + a_{nm} = 1 \quad (\text{لماذا ؟})$$

ومنها تكون $|\lambda| \le 1$.

نظرية :

إذا كانت A مصفوفة عشوائية شبه سهلة وكان لها $\lambda_1 = 1$ بـــدون تكرارية جبرية (وبالتالي فإن $|\lambda| \le 1, \forall i$) فإنه وبغض النظـــر عـــن القيم الإبتدائية ، فإن الإنتقالات الإحتمالية *Probability Transitins* ستستقر على متجه إحتمالي $p_0 = v_1$ حيث v_1 هو المتجه الذاتـــي الخاص بـــ $\lambda_1 = 1$.

الإثبات :

المصفوفة A شبه سهلة ، إذن

$$T^{-1}AT = D_\lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_n)$$

حيث :

$$T = [v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$$

وبالتالي فإن $T^{-1}A = D_\lambda T^{-1}$. وبأخذ المدور *Transpose* للطرفين :

$$A^T(T^{-1})^T = (T^{-1})^T D_\lambda$$

دع متجهات الصفوف في T^{-1} هي

$$w_1^T, w_2^T, \cdots\cdots, w_n^T$$

إذن هذا معناه أن

$$A^T w_i = \lambda_i w_i \quad , \quad i = 1,2,\cdots,n$$

أي أن w_i متجه ذاتي لـ A^T مناظر للقيمة الذاتية λ_i . وبالتالي فإن w_1 هو متجه ذاتي لـ A^T مناظر لـ $\lambda_1 = 1$ ومنها يكون $A^T w_1 = w_1$. دع $A^T = B = [b_{ij}]$ ، إذن

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_{1_j} = w_{1_i} \quad , \quad \forall i$$

أي أن

$$\begin{aligned}
&(b_{11}-1)w_{1_1} + b_{12}w_{1_2} + \cdots\cdots + b_{1n}w_{1_n} = 0 \\
&b_1 w_{1_1} + (b_{22}-1)w_{1_2} + \cdots\cdots + b_{2n}w_{1_n} = 0 \\
&\vdots \\
&b_{n1}w_{1_1} + b_{n2}w_{1_2} + \cdots\cdots + (b_{nn}-1)w_{1_n} = 0
\end{aligned}$$

وللمحافظة على كون المصفوفة A (أو A^T) عشوائية وأنه يجب أن يكون

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1 \quad , \quad \forall i$$

وللحفاظ على ذلك فإنه يجب أن يكون $w_{1i} = \alpha$ حيث α كمية مقياسية ثابتة . أي إن حل هـــذا النظم من المعادلات يجب أن يكون متناسباً مع المتجه $\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ ولذلك يمكننا أن نأخذ $w_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ كمتجه لـ A^T عند $\lambda_1 = 1$ ، وبالتالي ، إذا كان $T^{-1}T = I$ فإن $w_1^T v_1 = 1$ ، إذن :

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{1_1}\\v_{1_2}\\v_{1_3}\\\vdots\\v_{1_n}\end{bmatrix} = 1$$

أي أن $\sum_{i=1}^{n} v_{1_i} = 1$. أي أن v_1 (وهو المتجه الذاتي المناظر لـ $\lambda_1 = 1$) متجه عشوائي Stochastic Vector .. وهذا يفيد في النظرية أن $p_0 = v_1$ هو متجه عشوائي فعـــلاً . ولإثبـــات أن الإنتقـــالات الإحتمالية ستسقر على v_1 ، فإنه من المعلوم أن $A^k = TD_{\lambda^k}T^{-1}$ ، وأن :

$$\lim_{k\to\infty} A^k = T\left(\lim_{k\to\infty} D_{\lambda^k}\right)T^{-1} = T\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}T^{-1}$$ (لماذا ؟)

$$= \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1^T\\ w_2^T\\ \vdots\\ w_n^T\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}v_1 & v_2 & \cdots & v_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}$$ (لماذا ؟)

$$= \begin{bmatrix}v_1 & v_1 & \cdots & v_1\end{bmatrix}$$

دع p هو متجه عشوائي بحيث

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

فإن :

$$\lim_{k\to\infty} A^k p = v_1 = p_0$$

وبالتالي فإنه بغض النظر عن المتجه العشوائي الإبتدائي p فإنه بعد عدد من تكرار التجربة العشوائية فإن النظم الإنتقالي يستقر على v_1 (المتجه الذاتي لـ A الخاص بـ $\lambda_1 = 1$) .

لتوضيح ذلك : خذ المصفوفة A في المثال السابق ، فإن :

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda - 0.5 & -0.2 & -0.3\\ -0.3 & \lambda - 0.4 & -0.3\\ -0.2 & -0.4 & \lambda - 0.4\end{vmatrix} = 0$$

أي أن

$$\begin{vmatrix}10\lambda - 5 & -2 & -3\\ -3 & 10\lambda - 4 & -3\\ -2 & -4 & 10\lambda - 4\end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix}10\lambda - 2 & -10\lambda + 2 & 0\\ -3 & 10\lambda - 4 & -3\\ -2 & -4 & 10\lambda - 4\end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (10\lambda-2)\begin{vmatrix}10\lambda-4 & -3\\ -4 & 10\lambda-4\end{vmatrix}+(10\lambda-2)\begin{vmatrix}-3 & -3\\ -2 & 10\lambda-4\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow \quad (10\lambda-2)\left[(10\lambda-4)^2-12\right]+(10\lambda-2)(-30\lambda+12-6)=0$$

$$\Rightarrow \quad (10\lambda-2)(100\lambda^2-80\lambda+4)+(10\lambda-2)(-30\lambda+6)=0$$

$$\Rightarrow \quad (10\lambda-2)(100\lambda^2-110\lambda+10)=0$$

$$\Rightarrow \quad (10\lambda-2)(\lambda-1)(100\lambda-10)=0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1=1 \quad , \quad \lambda_2=0.2 \quad , \quad \lambda_3=0.1$$

أي أن

$$|\lambda_i|\le 1 \quad , \quad \forall i$$

وعند $\lambda_1=1$:

$$\begin{bmatrix}5 & -2 & -3\\ -3 & 6 & -3\\ -2 & -4 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c}5 & -2 & -3 & 0\\ -3 & 6 & -3 & 0\\ -5 & 2 & 3 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}5 & -2 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}4 & 0 & -4 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

وهذا يؤدي إلى

$$\left.\begin{array}{l}u_1-u_3=0\\ u_1-u_2=0\end{array}\right\rangle \Rightarrow \left|\begin{array}{l}u_1=u_3\\ u_1=u_2\end{array}\right\rangle \Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}u_1\\u_1\\u_1\end{bmatrix}=u_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

خذ $v_1=\left[\tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3}\right]^T$ (حتى يكون متجهاً عشوائياً) ، وبالتالي إذا أخذنـــــا $p=\left[0 \quad 0 \quad 1\right]^T$ ، فإن

$$Ap=\begin{bmatrix}0.3\\0.3\\0.4\end{bmatrix} \quad , \quad A^2p=\begin{bmatrix}0.33\\0.33\\0.34\end{bmatrix} \quad , \quad \cdots\cdots \quad , \quad \lim_{k\to\infty}A^kp=\begin{bmatrix}\tfrac{1}{3}\\ \tfrac{1}{3}\\ \tfrac{1}{3}\end{bmatrix}$$

أي أن هذا النظم سوف يستقر (كإحتمال) إلى إحتمالات متساوية للحالات الثلاثة : مشـــــمس ، غائم ، وممطر .

لاحظ أن $A^T = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \\ 0.3 & 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}$ وأن المتجه w_1 الخاص بـ $\lambda_1 = 1$ يتحدد كالآتي :

$$(I - A^T)w_1 = O$$

إذن

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -0.3 & -0.2 \\ -0.2 & 0.6 & -0.4 \\ -0.3 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -.3 & -2 \\ -2 & 6 & -4 \\ -3 & -3 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهذا بدوره يؤدي إلى

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -4 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

أي أن

$$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_2 = 0 \\ u_1 - 3u_2 + 2u_3 = 0 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \left|\begin{array}{l} u_2 = u_1 \\ 2u_3 = -u_2 + 3u_1 = 2u_1 \Rightarrow u_3 = u_1 \end{array}\right\rangle \Rightarrow w_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = u_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

خذ $w_1 = [1 \;\; 1 \;\; 1]^T$ حتى يكون $w_1^T v_1 = 1$ (أي $T^{-1}T = I$) .

٥-٣ التطبيق الثالث : النظم ذات الحساسية :

SENSITIVE SYSTEMS or ILL-CONDITIONED SYSTEMS :

٥-٣-١ مقدمة :

نعود بهذا التطبيق إلى المعادلات الخطية $Ax = b$. هذه المعادلات التي أطنبنا في إحكام حلها في الفصل الخاص بها .. ولكن هل هذا هو كل شئ ؟ . في الواقع لا .. هل لو حدث تغير (ولو طفيف) في أحد مُدخلات هذا النظم .. فهل يتأثر الحل بنفس القدر ؟ .. مثلاً دعنا نعتبر النظم

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 28 & 25 \\ 19 & 17 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix}}_{b}$$

حل هذا النظم يُعطى كالآتي :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 17 & -25 \\ -19 & 28 \end{bmatrix}}{(28)(17)-(25)(19)} \begin{bmatrix} 30 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -10 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10, x_2 = -10$$

والآن لنفرض أن العنصر (20) في المتجه b تغير ليُصبح (19) .. أي حدث تغير في قيمته قدره 5% ، فإننا سنجد أن الحل أصبح

$$x_1 = 35 \quad , \quad x_2 = -38$$

أي حدث تغير في الحل قدره تقريباً 350% ! . أي أن مثل هذا النظم له حساسية خلصة لأي تغير يحدث .

وهناك حساسية أخرى لهذا النظم عندما نلجأ إلى طريقة جاوس مثلاً ونحل هذا النظم لمنزلتين عشريتين فقط ، فإننا نصل إلى الحل

$$x_1 = 18 \quad , \quad x_2 = -19$$

وهو حل بعيد جداً عن الواقع . معنى هذا أن هذا النظم وأمثاله لهم حساسية عالية نحو الأخطاء في الطريقة الحسابية ونحو التغيير في قيم البيانات المُعطاة .. أمثال هذه النظم تُسمى **بالنُظم الحساسة** أو **النُظم المُعتلة** أو **بالنُظم المُعتلة الشروط** أو ــ كما أميل إلى تسميته ــ **بالنُظم ذات الحساسية** .

٥-٣-٢ العدد الشرطي Condition Number

أولاً : التغير في b :

دع $Ax = b$. فإذا ما تغيرت b بالقدر δb ، فإن x تتغير بالقدر δx بحيث

$$A(x + \delta x) = b + \delta b \quad \Rightarrow \quad A\delta x = \delta b$$

فإذا كان معكوس A موجوداً وفريداً فإن

$$\delta x = A^{-1}\delta b$$

وباستخدام خواص المقياس *Norm* فإن

$$\boxed{\|\delta x\| \le \|A^{-1}\| . \|\delta b\|} \qquad (1)$$

وهذا يُوضح أنه إذا كانت A^{-1} لها مقياس ضخم *Large Norm* فإن أقل خطأ في b سوف يُضَخَّم .

والآن دعنا نتأكد من النتيجة السابقة وذلك من خلال المثال السابق .. في المثال السابق :

$$A=\begin{bmatrix}28 & 25\\ 19 & 17\end{bmatrix} \Rightarrow |A|=(28)(17)-(25)(19)=1 \quad , \quad A^{-1}=\begin{bmatrix}17 & -25\\ -19 & 28\end{bmatrix}$$

فإذا أخذنا التعريف :
$$\|A\| = \underset{j}{Max}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

فإننا نجد أن :
$$\|A^{-1}\| = Max\{53,36\} = 53$$

فإذا كان $\delta b=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ، فإن $\|\delta b\| = 1$ وبالتالي فإنه طبقاً للنتيجة التي وصلنا إليها في (1) يكون :

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|.\|\delta b\| = 53$$

وهذا خطأ كبير بلا شك ويُفسر عِظم الخطأ في الحل نتيجة هذا التغيير الطفيف في المتجه b .

والآن دعنا نحسب الخطأ النسبي في x نتيجة الخطأ النسبي في b . حيث أن

$$Ax=b \quad \Rightarrow \quad \|b\| \le \|A\|\|x\|$$

وبما أن $\|A\|>0$ ، إذن $\|x\| \ge \frac{\|b\|}{\|A\|}$ ، أو بتعبير آخر

$$\boxed{\frac{1}{\|x\|} \le \frac{\|A\|}{\|b\|}} \qquad (2)$$

ومن (2) , (1) يمكن استنتاج أن

$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|.\|A\|.\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}}$$

وهذه المتباينة تُقارن الخطأ النسبي في الحل x بالخطأ النسبي في b . ويتضح من هذه المتباينة أن الخطأ يعتمد على **العدد الحرج** $\|A\|.\|A^{-1}\|$ والذي يُسمى العدد الشرطي *Condition Number* ويُرمز له بـ *cond(A)* .. أي أن

$$\boxed{cond(A) = \|A^{-1}\|.\|A\|}$$

ولكن :
$$A^{-1}A = I$$

إذن :
$$1 = \|I\| = \|A^{-1}A\| \le \|A^{-1}\|.\|A\| = cond(A)$$
أي أن :
$$cond(A) \ge 1$$

وكلما كان النظم له عدد شرطي كبير $(>>1)$ فإن هذه معناه أن النظم يكون ذي حساسية .

ثانياً : التغير في A :

بفرض أن δx هو التغير الحادث في الحل x نتيجة لتغير قدره δA في المصفوفة A ، إذن

$$Ax = b \;\Rightarrow\; (A+\delta A)(x+\delta x) = b \;\Rightarrow\; A\delta x + (\delta A)x + (\delta A)(\delta x) = O$$

وبإهمال الأخطاء الصغيرة من الرتبة الثانية (أي بإهمال $(\delta A)(\delta x)$) فإن

$$A\delta x + (\delta A)x \approx O \;\Rightarrow\; A\delta x \approx -(\delta A)x \;\Rightarrow\; \delta x \approx -A^{-1}(\delta A)x$$

(طبعاً بفرض أن معكوس A موجود وفريد) وبالتالي فإن

$$\|\delta x\| \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|.\|x\| \;\Rightarrow\; \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\|\delta A\|$$

أو بتعبير آخر :
$$\boxed{\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|.\|A\|.\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}}$$

والمتباينة الأخيرة تقيس الخطأ النسبي في مقياس x نتيجة الخطأ النسبي في مقياس A . وكما يظهر في هذه المتباينة ، نجد أن هذا الخطأ يعتمد أيضاً على العدد الشرطي $cond(A)$ ($= \|A^{-1}\|\|A\|$) .

ثالثاً : التغير في كلٍّ من b, A :

نظرية : (***Ben Noble & J. Daniel*, 1977 , *p*.170**)
دع $A = A_{n\times n}$ ودع $\|\cdots\|$ يرمز إلى مقياس ١ أو مقياس ٢ أو مقياس ∞ للمصفوفة أو للمتجه .. فإذا كانت المعادلة $Ax = b$ عُرضة للتغيرات الآتية : $(b \to b+\delta b, A \to A+\delta A)$ بحيث يكون $\|(\delta A)A^{-1}\| < 1$ ، فإن هذا يُنتج تغييراً في x قدره δx بحيث يكون

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le M.cond(A).\left[\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right]$$

حيث $M = \left(1 - \|(\delta A)A^{-1}\|\right)^{-1}$.

الإثبات :

يعتمد الإثبات على تذكر القارئ لبعض النتائج التي حصلنا عليها في الباب الأول ــ فصل المقيـــاس . من هذه النتائج أن المصفوفة $(A+R)$ تكون مصفوفة غير شاذة إذا كان

$$\|(A+R)^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\alpha} \quad , \quad \alpha = \|RA^{-1}\| < 1$$

وبأخذ $R = \delta A$ فإن هذا معناه أن $(A+\delta A)$ مصفوفة غير شاذة ، وبالتـــالي يُوجـــد حـــل فريـــد للمعادلات

$$(A+\delta A)(x+\delta x) = b + \delta b$$

وحيث أن $Ax = b$ فإن العلاقة السابقة تؤدي بنا إلى

$$(A+\delta A)\delta x + \underline{\underline{Ax}} + (\delta A)x = \underline{\underline{b}} + \delta b$$

أي أن

$$(A+\delta A)\delta x = \delta b - (\delta A)x \quad \Rightarrow \quad \delta x = (A+\delta A)^{-1}(\delta b - (\delta A)x)$$

وبالتالي فإن

$$\|\delta x\| \le \|(A+\delta A)^{-1}\|.\|(\delta b - (\delta A)x)\|$$

ولكن

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \le \frac{\|A^{-1}\|}{1-\alpha} \quad , \quad \alpha = \|(\delta A)A^{-1}\| < 1$$

بوضع $M = (1-\alpha)^{-1}$ ، إذن

$$\|(A+\delta A)^{-1}\| \le M\|A^{-1}\|$$

أي أن

$$\|\delta x\| \le M\|A^{-1}\|.\|\delta b - (\delta A)x\| \le M\|A^{-1}\|.(\|\delta b\| + \|(\delta A)x\|)$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M\|A^{-1}\|.\left(\frac{\|\delta b\|}{\|x\|} + \|(\delta A)\|\right)$$

ولكن

$$Ax = b \quad \Rightarrow \quad \|b\| = \|Ax\| \leq \|A\|.\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq \frac{\|b\|}{\|A\|}$$

إذن

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq M\|A^{-1}\|.\left(\frac{\|\delta b\|}{\underbrace{\|x\|}_{\geq \|b\|/\|A\|}} + \|(\delta A)\|\right) \leq M\|A^{-1}\|.\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|/\|A\|} + \|(\delta A)\|\right)$$

$$= M\|A^{-1}\|.\|A\|.\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

$$= M.cond(A).\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right).$$

حيث : $M = (1-\alpha)^{-1} = \left(1 - \|(\delta A)A^{-1}\|\right)^{-1}$

ملاحظة هامة :

النظرية السابقة تُعطي فقط حد أعلى لـ $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ وربما يكون غير واقعي .

ولتوضيح ذلك دعنا نأخذ المثال التالي (*Ben Noble & Daniel*, 1977, *p.* 171) . دع

$$A = A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad k \geq 0$$

وبالتالي فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. فإذا أخذنا $\|\cdot\cdot\|_\infty$ فإن

$$\|A\| = \|A^{-1}\| = 1 + k$$

وبالتالي فإن

$$cond(A) = (1+k)^2$$

وهو يتسع باتساع k . فإذا أخذنا المعادلات $Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=b}$ فإن الحل يكون :

$$x = \begin{bmatrix} 1-k \\ 1 \end{bmatrix}$$

فإذا اضطربت b إلى

$$b + \delta b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\delta_1 \\ 1+\delta_2 \end{bmatrix}$$

فإن

$$\delta x = \begin{bmatrix} \delta_1 - k\delta_2 \\ \delta_2 \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإنه للقيم الكبيرة لـ k يكون

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \approx \frac{k\delta_2}{k} = \delta_2$$

كذلك (إذا كانت $\delta_2 > \delta_1$) فإن

$$\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \approx \delta_2$$

وبالتالي فإن

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \approx \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

(وذلك لقيم k الكبيرة و لـ $\delta_2 > \delta_1$) . هذا معناه أن الحل ليس حساساً للتغير في b على الرغم من أن $cond(A)$ عالي القيمة .

والنتيجة التي نخرج بها من هذا المثال أن الحل يكون حساساً لبعض b وليس لكل b .

مثال : أوجد العدد الشرطي $cond(A)$ وذلك إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 0.505 & 0.495 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

الحل :

$$A = \begin{bmatrix} 0.505 & 0.495 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 0.01 \Rightarrow A^{-1} = 100\begin{bmatrix} 1 & -0.495 \\ -1 & 0.505 \end{bmatrix}$$

فإذا أخذنا $\|\cdots\|$ هو $\|\cdots\|_\infty$ فإن

$$cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = (2)(150.5) = 301$$

نظرية

العدد الشرطي $cond(A)$ يساوي جذر النسبة بين أكبر قيمة ذاتية وأصغر قيمة ذاتية لـ AA^T

الإثبات :

أنظر (*Forsythe , George and Moler* , 1967) .

أي أن
$$cond(A)=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \quad , \quad \lambda=\lambda\left(AA^T\right)$$

مع ملاحظة أن AA^T لها قيم ذاتية غير سالبة وحقيقية . **فمثلاً** في المثال السابق :

$$A=\begin{bmatrix}0.505 & 0.495\\ 1 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}0.505 & 1\\ 0.495 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow AA^T=\begin{bmatrix}0.50005 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda_{\min}=4\times 10^{-5}, \lambda_{\max}=2.50001$$
$$\Rightarrow cond(A)=\sqrt{\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}}=\sqrt{\frac{2.50001}{4\times 10^{-5}}}\cong 250$$

مثال : أثبت أن : $cond(AB)\le cond(A).cond(B)$

الإثبات :

$$cond(AB)=\|AB\|.\left\|(AB)^{-1}\right\|=\|AB\|.\left\|B^{-1}A^{-1}\right\| \le \|A\|.\|B\|\left\|B^{-1}\right\|.\left\|A^{-1}\right\|=\|A\|.\left\|A^{-1}\right\|\|B\|\left\|B^{-1}\right\|$$

أي أن : $cond(AB)\le cond(A).cond(B)$

تمارين على التطبيق الثالث :

(١) أثبت أن $cond(A)\ge 1$.

(٢) إذا كان $\frac{\|B\|}{\|A\|}=\theta<1$ ، فأثبت أن $cond(A+B)\le \frac{cond(A)+\theta}{1-\theta}$.

(أنظر *Deif A.S.*, 1982)

(٣) إذا كان $(Ax=b\,, b\to b+\delta b\,, A\to A+\delta A)$ ، أثبت أن

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \frac{cond(A)}{1-\|\delta A\|.\|A^{-1}\|}\left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}+\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}\right)$$

(أنظر *Ben Noble , 1969 , p.434*)

٥-٤ التطبيق الرابع : طريقة أقل المربعات

LEAST SQUARES TECHNIQUE

٥-٤-١ مقدمة :

في كثيرٍ من المسائل العلمية تكون العلاقة بين متغير مستقل x ومتغير تابع y بمجرد قياسات معملية أو تجارب .. إلخ بحيث يكون المعلوم هو الأقواس المرتبة (x_i, y_i) حيث $i = 0,1,2,\cdots,m$ (أي $m+1$ من النقاط) ، والمطلوب **التوفيق** بين هذه النقاط للحصول على **أمثل منحنى *Optimal Curve*** من درجة مُعينة (مثلاً خط مستقيم أو منحنى من الدرجة الثانية ...) . هذا معناه أن هذا المنحنى الأمثل لا يمر بكل النقاط المُعطاة ولكن يمر بينها بحيث يكون مقياس ما للخطأ أقل ما يمكن .

أما عن هذا المنحنى التوفيقي فإنه يمكننا إستعمال **قواعد *Bases*** عدة له ، ولتكن $\{\Phi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ بحيث تكون $\Phi_n(x)$ من درجة n . وتُختار هذه القواعد بحيث تكون متعامدة *Orthogonal* لنضمن إستقلالها من جهة ولتسهيل التحليل الرياضي (باستخدام شروط التعامد) من جهةٍ أخرى . على هذا النحو يكون المنحنى التوفيقي المُراد أن يكون أمثلاً على هذا النسق الرياضي على الشكل :

$$y = F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x)$$

ويكون المطلوب هو كيفية حساب المعاملات a_i التي تجعل مقياس الخطأ أقل ما يمكن .

أما عن مقياس الخطأ ، فهناك مقاييس كثيرة .. فيمكن إختيار القيمة العددية للفرق بين قيمة y المُقاسة وقيمة y المحسوبة من المنحنى كمقياس للخطأ .. أي يمكن أخذ

$$e = \sum_{i=0}^{m} e_i = \sum_{i=0}^{m} |y(x_i) - y_i|$$

كمقياس للخطأ . ولكن الحصول على المعاملات من هذه الصيغة الرياضية فيه بعض الصعوبات الخاصة بالتحليل الرياضي والناشئة من كون **الدالة العددية *Absolute*** (or ***Modulus***) ***Function*** غير

قابلة للتفاضل عند بعض النقاط .. وتجنباً لهذه المشكلة الرياضية تم إختيار **مقياس مربـــع الخطـــأ** (في الواقع يُسمى الخطأ على **المقياس الإقليدي** ***Euclidean Norm***) وفيه يكون :

$$e^2 = \sum_{i=0}^{m} e_i^2 = \sum_{i=0}^{m} \left(y(x_i) - y_i\right)^2$$

حيث يتم التجميع على كل النقاط الموجودة بالجدول . وبالتعويض في العلاقة الأخيرة عـــن معادلـــة المنحنى التوفيقي نحصل على :

$$e^2 = \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x) - y_i \right)^2$$

وللحصول على أقل خطأ فإن

$$\frac{\partial e^2}{\partial a_j} = 0 \quad , \quad \forall j = 0,1,2,\cdots,n$$

أي أن

$$\frac{\partial e^2}{\partial a_j} = \sum_{i=0}^{m} 2 \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x) - y_i \right) \Phi_i(x) = 0 \quad , \quad \forall j = 0,1,2,\cdots,n$$

أي أننا نحصل على المعادلات الخطية الآتية :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sum \Phi_0^2 & \sum \Phi_1\Phi_0 & \sum \Phi_2\Phi_0 & \cdots & \sum \Phi_n\Phi_0 \\ \sum \Phi_0\Phi_1 & \sum \Phi_1^2 & \sum \Phi_2\Phi_1 & \cdots & \sum \Phi_n\Phi_1 \\ \sum \Phi_0\Phi_2 & \sum \Phi_1\Phi_2 & \sum \Phi_2^2 & \cdots & \sum \Phi_n\Phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum \Phi_0\Phi_n & \sum \Phi_1\Phi_n & \sum \Phi_2\Phi_n & \cdots & \sum \Phi_n^2 \end{bmatrix}}_{N} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}}_{\underline{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum \Phi_0 y \\ \sum \Phi_1 y \\ \sum \Phi_2 y \\ \vdots \\ \sum \Phi_n y \end{bmatrix}}_{\underline{Y}}$$

حيث ($\sum$) هي تجميع على كل نقاط الجدول . وتُسمى المعادلة الأخيرة بـــ **المعادلـــة القياســـية** ***Normal Equation*** وتُسمى مصفوفة المعاملات بـــ **المصفوفـــة القياســـية** ***Normal Matrix N*** ، وبالتالي يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة

$$N\underline{A} = \underline{Y}$$

حيث

$$N=\begin{bmatrix}\sum\Phi_0^2 & \sum\Phi_1\Phi_0 & \sum\Phi_2\Phi_0 & \cdots & \sum\Phi_n\Phi_0\\ \sum\Phi_0\Phi_1 & \sum\Phi_1^2 & \sum\Phi_2\Phi_1 & \cdots & \sum\Phi_n\Phi_1\\ \sum\Phi_0\Phi_2 & \sum\Phi_1\Phi_2 & \sum\Phi_2^2 & \cdots & \sum\Phi_n\Phi_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum\Phi_0\Phi_n & \sum\Phi_1\Phi_n & \sum\Phi_2\Phi_n & \cdots & \sum\Phi_n^2\end{bmatrix},\ \underline{A}=\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix},\ \underline{Y}=\begin{bmatrix}\sum\Phi_0 y\\\sum\Phi_1 y\\\sum\Phi_2 y\\\vdots\\\sum\Phi_n y\end{bmatrix}$$

وبالحصول على المعاملات من جداول التجميع المُعَدة لذلك نحصل على المعادلة القياسية ثـــم نحلهـــا بإحدى الطرق المباشرة أو غير المباشرة للحصول على متجه المعاملات $\underline{A}$.

مثال : أوجد أمثل خط مستقيم يُمثل البيانات المُعطاة على المقياس الإقليدي :

x	1	2	3	4
y	6.5	9.6	13.8	18.3

الحل :

المنحنى التوفيقي هنا له المعادلة

$$y=a_0+a_1x$$

بإعداد الجداول المناسبة لحساب a_0, a_1 لهذا المنحنى ، نحصل على :

x	y	x^2	xy
1	6.5	1	6.5
2	9.6	4	19.2
3	13.8	9	41.4
4	18.3	16	73.2
$\sum x=10$	$\sum y=48.2$	$\sum x^2=30$	$\sum xy=140.3$ 1

وبالتالي تُصبح المعادلات :

$$\begin{bmatrix}4 & 10\\10 & 30\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48.2\\140.3\end{bmatrix}\ \Rightarrow a_0=2.15\quad,\quad a_1=3.96$$

أي أن أمثل خط مستقيم يمثل البيانات السابقة هو :

$$y=2.15+3.96x$$

مثال : كون المعادلات الطبيعية للحصول على أمثل منحنى درجة ثانية على المقياس الإقليدي وذلك باستعمال قواعد لاجندر *Legendre* $\{P_i\}$ لتمثيل البيانات

x	1	3	4	5
y	7.2	22.8	33.6	47.4

الحل :

قواعد لاجندر حتى الدرجة الثانية هي

$$P_0 = 1 \quad , \quad P_1 = x \quad , \quad P_2 = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)$$

وبالتالي تكون المعادلة القياسية هي :

$$\begin{bmatrix} \sum P_0^2 & \sum P_0P_1 & \sum P_0P_2 \\ \sum P_0P_1 & \sum P_1^2 & \sum P_1P_2 \\ \sum P_0P_2 & \sum P_1P_2 & \sum P_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum P_0 y \\ \sum P_1 y \\ \sum P_2 y \end{bmatrix}$$

ثم نُعد الجدول المناسب لذلك

x	y	P_1^2	P_2	P_2^2	P_1P_2	P_1y	P_2y
....	....	....	....	....	....	....	....
↑ $\sum P_0^2$	↑ $\sum P_0 y$	↑ $\sum P_1^2$	↑ $\sum P_2$	↑ $\sum P_2^2$	↑ $\sum P_1P_2$	↑ $\sum P_1 y$	↑ $\sum P_2 y$

وبتكوين الجدول السابق والتعويض في المعادلة القياسية وحلها بطريقة تكرارية مناسبة يمكن الحصول على

$$a_0 = 3.386 \quad , \quad a_1 = 3.068 \quad , \quad a_2 = 0.773$$

وبالتالي فإن

$$\begin{aligned} y &= a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2 \\ &= (3.386) \times (1) + (3.068) \times (x) + (0.773) \times \left[\frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right)\right] \\ &= 2.9995 + 3.068x + 1.1595x^2 \end{aligned}$$

وهو أمثل منحنى درجة ثانية بقواعد لاجندر .

٥-٤-٢ طريقة أخرى للحصول على المعادلات القياسية :

يمكن إعادة صياغة المشكلة السابقة كالآتي : لنفرض أن المنحنى المطلوب هــــو $y=F(x)$ ، ودعنا نفترض أنه يمر بكل النقاط المُعطاة .. أي نفرض أن :

$$y_i = F(x_i)$$

أو

$$y_j = \sum_{i=0}^{n} a_i \Phi_i(x_j) \quad , \quad j = 0,1,2,\cdots,m$$

بالطبع نحصل على معادلات ذات ثلاثة إحتمالات : الأول أن يكون $n<m$ ، الثــــاني أن $n=m$ ، والثالث أن $n>m$. وعادةً ما تكون المشكلة محصورة في الإحتمال الثالث (حيث أن درجة المنحنى المطلوب تكون من الدرجة الثانية أو الثالثة أو الرابعة على الأكثر) بينما تُوجد الكثـــير مــن نقـــاط البيانات . ولقد تطرقنا إلى حل هذه المعادلات في الباب الثاني ووجدنا أن الحل الذي يُحقق أقل خطأ على المقياس الإقليدي يكون كالآتي :

$$A_{(m+1)\times(n+1)} x = y$$

حيث

$$x = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

إذن بالضرب في A^T يكون

$$\left(A^T A\right)_{(n+1)\times(n+1)} x = A^T y$$

لاحظ أن المعادلات الناتجة تُكافئ ما حصلنا عليه في المقدمة وعلى القارئ أن يتأكد من ذلك .

وسواء كان $\left(A^T A\right)$ (وهي مصفوفة قياسية *Normal Matrix*) قابلة للعكس *Invertible* أم لا فإننا عادةً ما نحصل على معادلات يجب حلها (بطرق ذكية) . وأُذكر القارئ أنه تم تحليــــل نفـــس المشكلة (حالة عدد المعادلات أكبر من عدد المجاهيل) في الباب الثاني وفيه تم جعل مقياس ـــ ٢ أقل ما يمكن وهو نفس الإثبات بطريقٍ آخر .

مثال : أوجد المنحنى الأمثل من الدرجة الثانية مستعملاً القواعد $\{x^i\}$ للبيانات

x	1	2	3	4
y	6.5	9.6	13.8	18.3

الحل :

المنحنى التوفيقي هنا له المعادلة

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

وبالتعويض بالنقاط نحصل على المعادلات الآتية :

$$\begin{aligned} 6.5 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ 9.6 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 \\ 13.8 &= a_0 + 3a_1 + 9a_2 \\ 18.3 &= a_0 + 4a_1 + 16a_2 \end{aligned}$$

أي أن

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.5 \\ 9.6 \\ 13.8 \\ 18.3 \end{bmatrix}$$

وبالضرب في A^T نجد أن

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}}_{A^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{bmatrix}}_{A^T} \begin{bmatrix} 6.5 \\ 9.6 \\ 13.8 \\ 18.3 \end{bmatrix}$$

ومنها نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 100 \\ 30 & 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.2 \\ 140.3 \\ 461.9 \end{bmatrix}$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على المعاملات ومن ثم معادلة المنحنى الأمثل المطلوب ، وعلى القارئ أن يفعل ذلك إكمالاً للحل .

ملحوظة :

لاحظ أن المعادلات الفرعية

$$\begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48.2 \\ 140.3 \end{bmatrix}$$

تُعطي الخط الأمثل كما سبق وبينا في مثال سابق . كذلك لاحظ أن هذه المعادلات هي نفسها المعادلات القياسية .

مثال : أوجد المنحنى الأمثل $y = ae^{bx}$ والذي يُمثل البيانات الآتية

x	0	1	2	3
y	0.99	0.3	0.1	0.05

الحل :

المنحنى التوفيقي هنا له المعادلة $y = ae^{bx}$ وهذه الصيغة للمنحنى غريبة عن الأساس النظري الذي بنينا عليه هذا الفصل من الكتاب . ولكن بأخذ $\ln(\cdots)$ لكل من الطرفين فإن المسألة تتحول إلى فراغنا كالآتي :

$$\ln y = \ln a + bx \quad \Rightarrow \quad z = a_0 + a_1 x$$

حيث

$$z = \ln y \quad , \quad a_0 = \ln a \quad , \quad a_1 = b$$

وبالتالي لابد من تعديل البيانات كالتالي :

x	0	1	2	3
$z = \ln y$	-0.01	-1.2	-2.3	-3.0

وبإعداد الجدول المناسب لحساب a_0, a_1 لهذا المنحنى ، نحصل على :

x	z	x^2	xz
0	-0.01	0	0
1	-1.20	1	-1.20
2	-2.30	4	-4.60
3	-3.00	9	-9.00
$\sum x = 6$	$\sum y = -6.51$	$\sum x^2 = 14$	$\sum xz = -14.8$

وبالتالي تُصبح المعادلات :

$$\begin{bmatrix}4 & 6\\6 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6.51\\-14.8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}a_0\\a_1\end{bmatrix}=\frac{-1}{20}\begin{bmatrix}14 & -6\\-6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6.51\\14.8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}a_0=-0.11\\a_1=-1.007\end{cases}$$

ومنها يمكن معرفة a , b :

$$\ln a = a_0 = -0.11 \quad \Rightarrow \quad a = e^{a_0} = e^{-0.11} = 0.9$$
$$b = a_1 = -1.007$$

أي أن أمثل منحنى على الصورة $y = ae^{bx}$ و يمثل البيانات السابقة هو $y = 0.9e^{-1.007x}$.

ملاحظات هامة :

(١) إذا أردنا الحصول على أمثل منحنى $y = ae^{bx}$ واتبعنا نفس الأسلوب المباشر في الحل ، فإننا نحصل على الآتي :

$$e^2 = \sum_{i=0}^{m}\left(ae^{bx_i} - y_i\right)^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial e^2}{\partial a} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} 2\left(ae^{bx_i} - y_i\right)e^{bx_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{m} ae^{2bx_i} - \sum_{i=0}^{m} y_i e^{bx_i} = 0 \ (1) \\[2ex] \dfrac{\partial e^2}{\partial b} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} 2\left(ae^{bx_i} - y_i\right)ae^{bx_i}x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{m} ax_i e^{2bx_i} - \sum_{i=0}^{m} x_i y_i e^{bx_i} = 0 \ (2) \end{cases}$$

والمعادلتان (2) , (1) معادلتان غير خطيتين *Nonlinear* في a , b ، وبالتالي أصبحت هناك صعوبة في الحل بهذا الأسلوب .

وهنا يبرز سؤال : " هل القيم التي نحصل عليها بعد أخذ $\ln(\cdots)$ وتحويل المسألة إلى مسألة خطية ، هل هذه القيم تجعل المنحنى $y = ae^{bx}$ أمثلياً ؟ . دعنا نعود نأخذ القيمة الناتجة (من المثال السابق .. $a = 0.9, b = -1.007$) ونعوض بها في المعادلتين (2) , (1) السابقتين ونرى ما إذا كانتا متحققتين أم لا :

* **بالتعويض في المعادلة (1) :**

$$0.9\sum e^{-2.014x_i} - \sum y_i e^{-1.007x_i} = 1.02225 - 1.11538 = -0.093 \neq 0$$

* بالتعويض في المعادلة (2) :

$$0.9\sum x_i e^{-2.014x_i} - \sum x_i y_i e^{-1.007x_i} = 0.158584 - 0.14359761 = 0.015 \neq 0$$

وبالتالي لا تعتبر القيم التي حصلنا عليها من تحويل المسألة إلى خطية (أي $a = 0.9, b = -1.007$) هي التي تجعل المنحنى $y = ae^{bx}$ أمثلاً .. ولكنها تقريب جيد على كل حال .

(٢) إذا طُلب توفيق المنحنى على صورة $y = \frac{a}{b + cx}$ فإنه يمكن التقريب أولاً إلى الخطية بجعل

$$y = \frac{a}{b + cx} = \frac{1}{(b/a) + (c/a)x} = \frac{1}{a_0 + a_1 x} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{1}{y} = a_0 + a_1 x$$

حيث

$$a_0 = \frac{b}{a} \quad , \quad a_1 = \frac{c}{a}$$

وبعد الحصول على قيم a_0, a_1 يمكن الحصول على معادلة المنحنى

$$y = \frac{1}{a_0 + a_1 x} = \frac{a}{b + cx}$$

٥-٤-٣ طريقة أقل المربعات الموزونة Weighted Least Squares Method

لبعض التطبيقات ذات الحساسية لبعض المعادلات ، تُستخدم أوزاناً لتوضيح **ثقل** هذه المعادلات بالذات بالنسبة لبقية المعادلات .. وبالتالي يكون

$$e^2 = \sum_{i=0}^{m} w_i [F(x_i) - y_i]^2$$

وبعد إجراء الأمثلية بالنسبة للمعادلات ــ كما سبق ــ فإننا نصل إلى الآتي $A^T W A x = A^T W y$ ، حيث $W = diag(w_0, w_1, \cdots\cdots, w_m)$. وأرجو من القارئ أن يحاول بنفسه تحصيل هذا الموضوع الهام .

٥-٥ التطبيق الخامس : رسومات الحاسب COMPUTER GRAPHICS

٥-٥-١ مقدمة :

في هذا التطبيق ننظر إلى المصفوفة المربعة A كتحويلـة خطيـة Linear Transformation T حيث :

$$T : R^n \to R^n$$

والتي لها خواص هندسية هامة وخاصـةً إذا كـانت المصفوفـة A متوحـدة Orthonormal (أي $A^T A = I$) .

لتوضيح ذلك نفرض أن التحويلة الخطية $T : R^n \to R^n$ تُعرف كالآتي :

$$T(x) = Ax$$

حيث A مصفوفة متوحدة . مثل هذا التحويل الخطي يُحافظ على **الضرب البيـني Inner Product** للمتجهات ، إذ أن

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = (Ax)^T (Ay) = x^T \underbrace{A^T A}_{=I} y = x^T y = \langle x, y \rangle$$

وبالتالي فإن هذه التحويلة الخطية تُحافظ على المسافات بين المتجهات .. أي أن

$$\|T(x) - T(y)\|^2 = \|T(x-y)\|^2 = \langle T(x-y), T(x-y) \rangle = (A(x-y))^T A(x-y)$$
$$= (x-y)^T \underbrace{A^T A}_{I} (x-y) = (x-y)^T (x-y) = \|x-y\|^2$$

وبالتالي فإن المسافة بين $T(x)$ و $T(y)$ هي نفسها المسافة بين x و y .. وبالتالي نكون قد قدمنا فيما سبق للنظرية التالية :

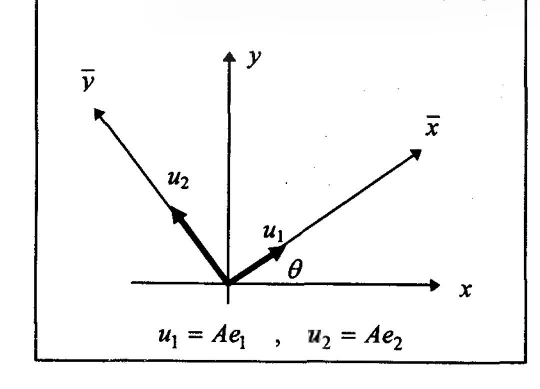
> **نظرية :**
> **التحويلة الخطية $T : R^n \to R^n$ والمُعرفة بـ $T(x) = Ax$ تُسمى بـ أيزومتري Isometry إذا وفقط إذا كانت A متوحدة .**

ملحوظة هامة : المحافظة على المسافات والضرب البيني يؤدي بالتالي إلى المحافظة على الزوايا .. إذ أن

$$\cos\theta = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$$

نظرية :

إذا كان $T:R^n \to R^n$ تحويل خطي أيزومتري في الفراغ الثنائي ، فإن هذا التحويل في نظام محاور يميني ***Right-Handed Coordinate System*** يُكافئ دوران ***Rotation*** المتجه حول نقطة الأصل عكس عقارب الساعة خلال زاوية θ حيث $0 \le \theta \le 2\pi$



والشكل المقابل يُوضح هذا الــــدوران . وفي هذه الحالة من السهل إثبات أن

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

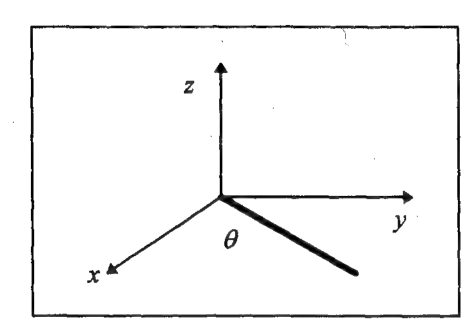
وعلى القارئ أن يُثبــت ذلــك بالإســتعانة بالمبادئ البسيطة في الهندسة التحليلية .

ويمكن كتابة التحويل علــى النحــو التالي :

$$\begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

نظرية :

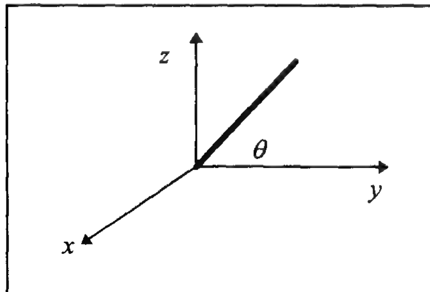
إذا كان $T:R^n \to R^n$ تحويل خطي أيزومتري في الفراغ الثلاثي ، فإن هذا التحويل في نظام محاور يميني ***Right-Handed Coordinate System*** يُكافئ دوران ***Rotation*** المتجه حول خطٍ ما يمــر بنقطــة الأصل .



* فإذا كان الدوران حول محور z بزاوية θ فإن

$$A_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

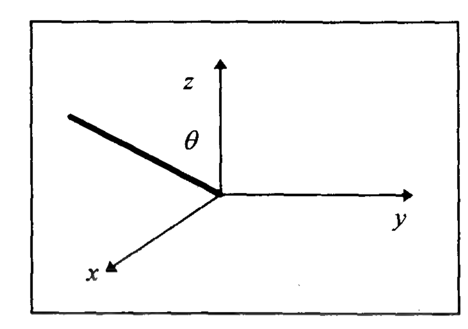
(المتجه في مستوى عمودي على محور z) .



* فإذا كان الدوران حول محور x بزاوية θ فإن

$$A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

(المتجه في مستوى عمودي على محور x) .



* فإذا كان الدوران حول محور y بزاوية θ فإن

$$A_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

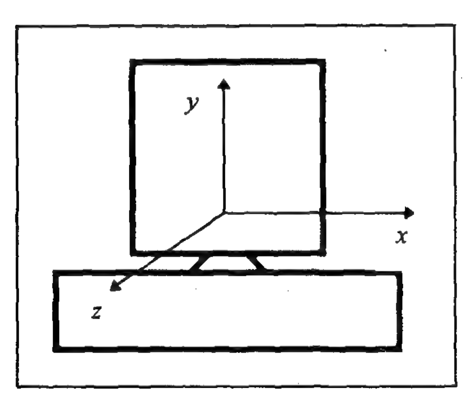
(المتجه في مستوى عمودي على محور y) .

مثال : إذا كان التحويل T هو حاصل دوران $45°$ حول محور x ثم أتبعه دوران $45°$ حول محور y ، فما هي مصفوفة التحويل .

الحل :

$$A = A_y A_x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

٥-٥-٢ رسومات الحاسب



والآن دعنا ننتقل إلى نظام عرض الأشكال على شاشة الحاسب ولنأخذ محاورنا اليمينية كما هو موضح بالشكل . إن الشكل في الفراغ يتميز بنقــاط تُســمى **الرؤوس** ***Vertices*** .. لتكن $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ، وكذلك بالخطوط الواصلة بين هـــذه الــرؤوس .. وتُســمى **الأحرف** ***Edges*** . ربما يتبادر إلى الذهن أن أســـهل حل للتعبير عن الشكل هو إسقاط البعد الثالث في كل نقطة z_i .. ولكن الشكل الناتج في المستوى xy ربما لا يُعبر عن الشكل الفراغي إطلاقاً .. فكِّر مثلاً في مكعب يتوازى أحد أوجهه مع المستوى xy ، وبالتالي فإنه من الأسهل دوران الشكل في الفراغ ثم بعد ذلك إسقاطه على المستوى xy (بحذف البعد z) وذلك يتم ببساطة كالتالي :

لتكن المصفوفة P تُعبر عن مصفوفة النقاط قبل الدوران :

$$P = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \end{bmatrix}_{3\times n}$$

فإذا كانت المصفوفة A هي مصفوفة الدوران $T: R^n \to R^n$ حول أحد المحاور فــإن النقــاط بعــد الدوران تحددها أعمدة المصفوفة P' حيث $P' = AP$ ، ثم نحصل بعد ذلك علــى الإســقاط علــى المستوى xy بحذف z في المصفوفة P' .

مثال لذلك ، فلنأخذ المثلث الموضح بالشكل ، وبالتالي فإن

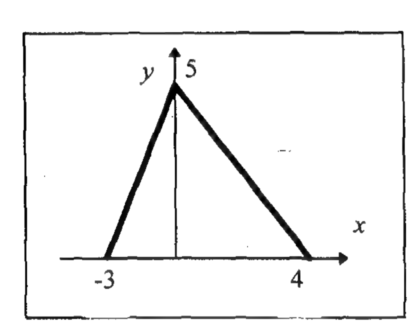
$$P = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

دعنا ندير الشكل حول محور y بزاوية مقدارها $\theta \cong 36.87°$ بحيث

$$\sin\theta = 0.6 \quad , \quad \cos\theta = 0.8$$

فإن

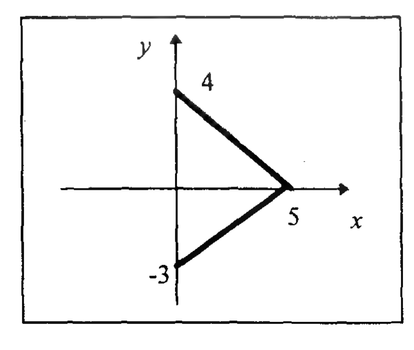
$$P' = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 & -0.6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ \cdot/\cdot & \cdot/\cdot & \cdot/\cdot \end{bmatrix}$$



أي أن المثلث (بعد حذف البعد z) يصبح كما هو مبين بالشكل المقابل .

والآن دعنا ندير الشكل حول محور x بنفس الزاوية السابقة ، في هذه الحالة تكون

$$P' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & -0.6 \\ 0 & 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ \cdot/\cdot & \cdot/\cdot & \cdot/\cdot \end{bmatrix}$$

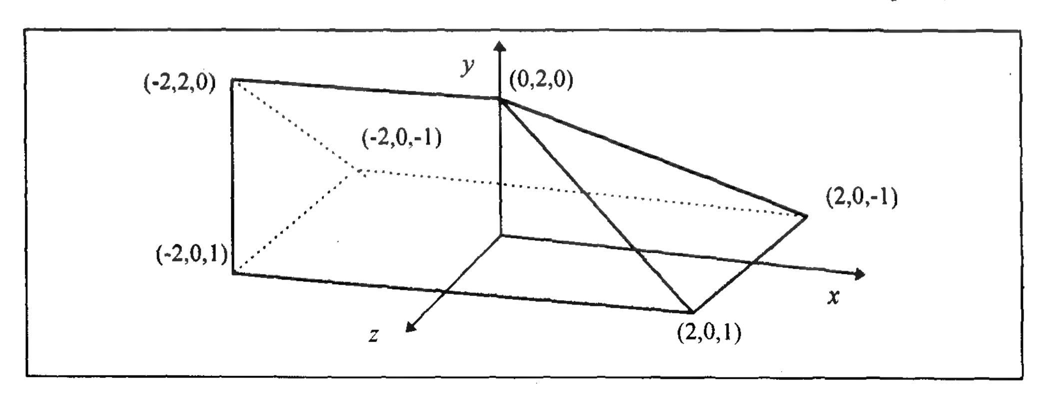


أي أن المثلث (بعد حذف البعد z) يصبح كما هو مبين بالشكل المقابل .

ملاحظة :

يتم التوفيق بين الدوران حول محور y (وعادةً يُسمى **دوران** ***Spin***) والدوران حول محور x (وعادةً يُسمى **قلب** ***Tip***) للحصول على شكل مقبول لعرض الجسم .

وننقل البرنامج التالي (مع بعض التصرف لجعل الجسم مُتحركاً) من (*Edwards et al.*, 1988 , *p.* 346) مكتوباً بلغة **الباسيك** ***BASIC*** للحصول على عرض مناسب للجسم الموضح بالشكل التالي

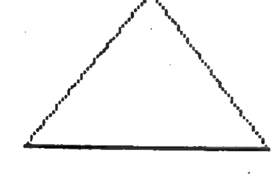


```
100 REM program rotated polyhedr
110 REM draws polyhedron whose vertices and
120 REM edges are specified in data statements
130 REM
140 REM initialization:
150 REM
160      SCREEN 1:CLS:KEY OFF
170        WINDOW (-4,-4)-(4,4)
173      DEFINT I,J,K,M,N
180      DIM A(3,3):PI=3.141593 :DEFINT I,J,K,M,N
190 REM vertex data
195      DATA 6,-2,0,1,-2,2,0,-2,0,-1,2,0,1,0,2,0,2,0,-1
200 REM edge data:
210      DATA 9,1,2,1,3,2,3,1,4,2,5,3,6,4,5,5,6,4,6
220 REM read vertices:
230      READ N 'number of vertices
240      DIM X(N),Y(N),Z(N)
250      FOR J=1 TO N
260          READ X(J),Y(J),Z(J)
270      NEXT J
280 REM
290 REM spin:
300     INPUT "spin angle (deg)";SPIN
304 FOR TIP=0 TO 180 STEP 15
306 CLS
310      SPIN=SPIN*PI/180
320      A(1,1)=COS(SPIN):A(1,2)=0          :A(1,3)=-SIN(SPIN)
330      A(2,1)=0        :A(2,2)=1          :A(2,3)=0
340      A(3,1)=SIN(SPIN):A(3,2)=0          :A(3,3)=COS(SPIN)
350      GOSUB 600   'multiply by spin matrix
360 REM
390 REM tip:
410      TIP=TIP*PI/180
420      A(1,1)=1   :A(1,2)=0          :A(1,3)=0
430      A(2,1)=0   :A(2,2)=COS(TIP)   :A(2,3)=-SIN(TIP)
440      A(3,1)=0   :A(3,2)=SIN(TIP)   :A(3,3)=COS(TIP)
450      GOSUB 600   'multiply by tip matrix
460 REM
500 REM plot edges:
510      READ M   'number of edges
520      FOR K=1 TO M
530          READ I,J   'vertices of next edge
540          LINE (X(I),Y(I)) - (X(J),Y(J))
550      NEXT K
555 RESTORE 210
558 FOR H=1 TO 9000 :NEXT H
560 NEXT TIP
564 END
570 REM
590 REM matrix multiplication
600      FOR J=1 TO N
610      X=X(J) :Y=Y(J)  :Z=Z(J)
620      X(J)=A(1,1)*X +A(1,2)*Y +A(1,3)*Z
630      Y(J)=A(2,1)*X +A(2,2)*Y +A(2,3)*Z
640      Z(J)=A(3,1)*X +A(3,2)*Y +A(3,3)*Z
650      NEXT J
660      RETURN
```

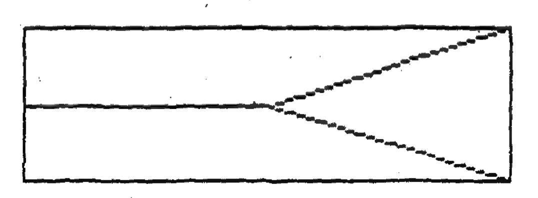
ونعرض الآن بعض الأشكال الناتجة من تشغيل البرنامج السابق بزوايا دوران *Spin* وقلب *Tip* مختلفة :

```
spin angle (deg)? 0
tip angle(deg)? 0
Ok
█
```

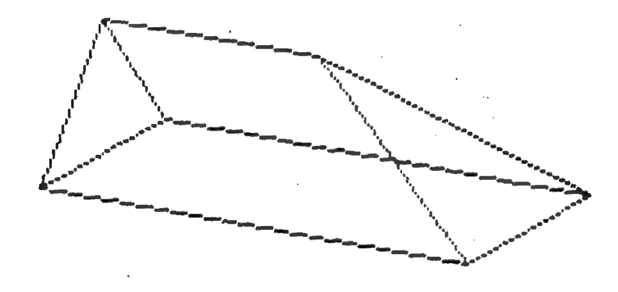
```
spin angle (deg)? 90
tip angle(deg)? 0
Ok
█
```

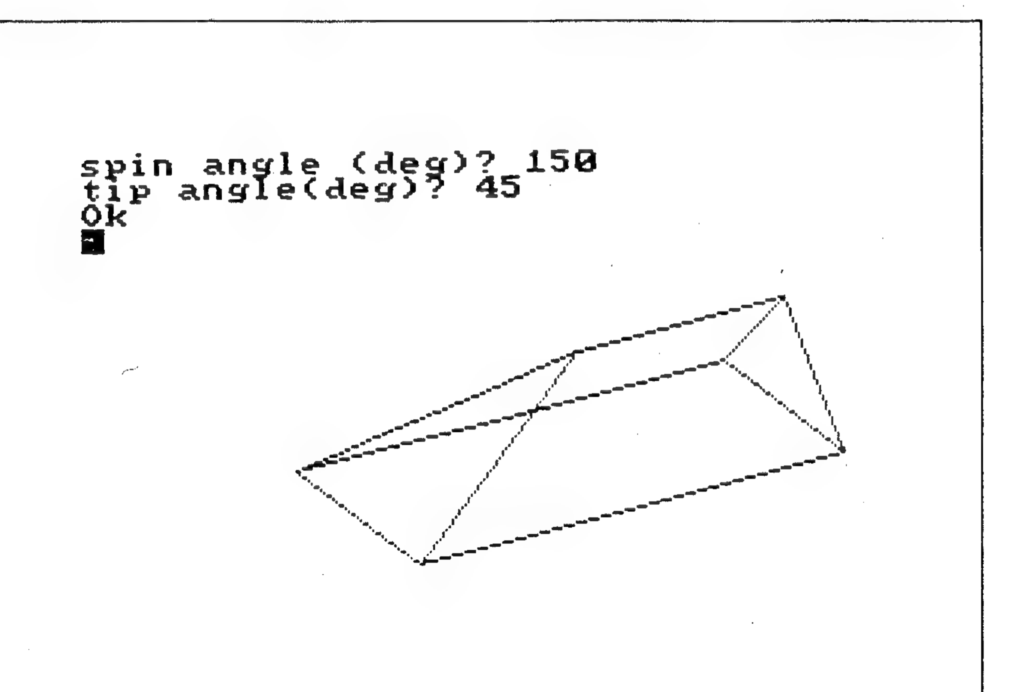


```
spin angle (deg)? 0
tip angle(deg)? 90
Ok
```

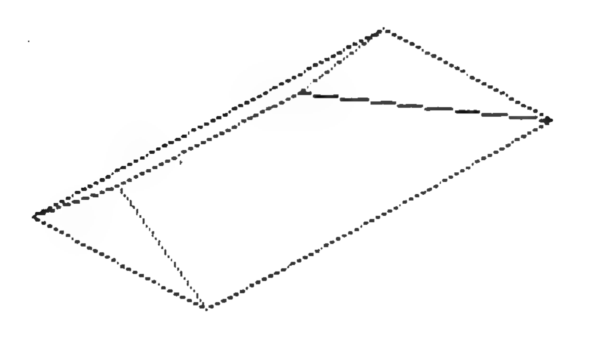


```
spin angle (deg)? 30
tip angle(deg)? 30
Ok
```



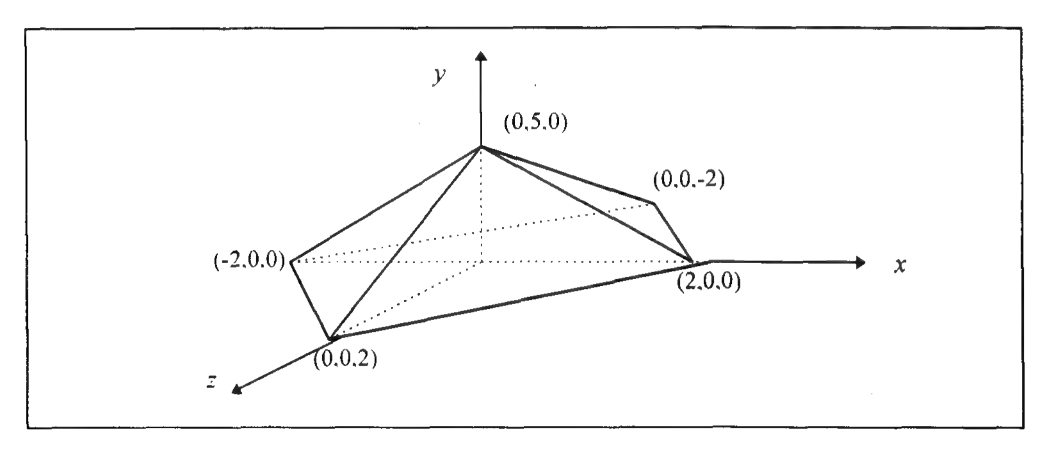

spin angle (deg)? 150
tip angle(deg)? 45
Ok


spin angle (deg)? -45
tip angle(deg)? 60
Ok



تمرين للقارئ :

قم بإدارة الخيمة المبينة بالشكل التالي :

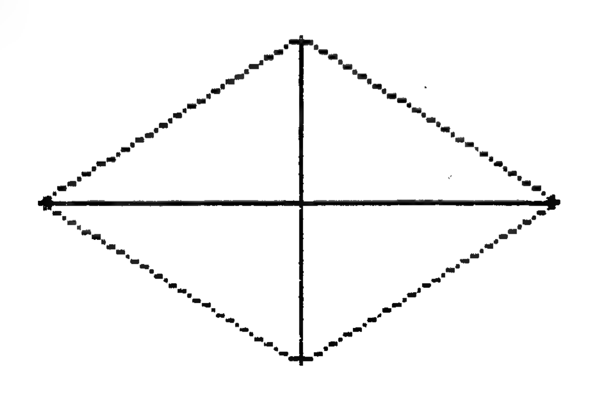


وهذه هي بعض الأشكال التي يمكن الحصول عليها

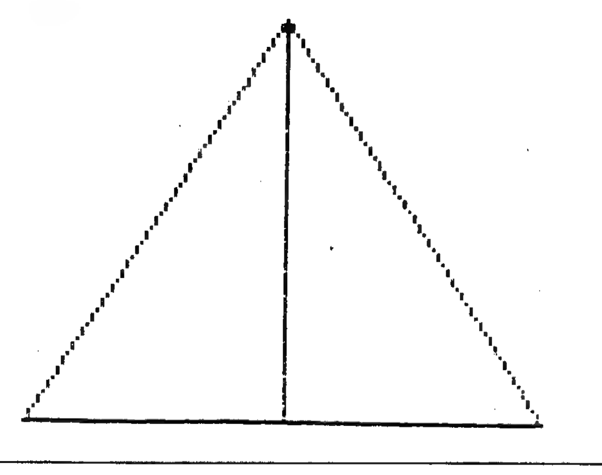
```
spin angle (deg)? 45
tip angle (deg)? 45
Ok
```

```
spin angle (deg)? 30
tip angle (deg)? 160
Ok
```

```
spin angle (deg)? 0
tip angle (deg)? 90
Ok
```



```
spin angle (deg)? 0
tip angle (deg)? 0
Ok
```



٥-٦ التطبيق السادس : الصيغ التربيعية QUADRATIC FORMS

٥-٦-١ المعادلة من الدرجة الثانية في x, y :

الصورة العامة لهذه المعادلة هي

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

حيث تنتمي المعاملات وكذلك x, y إلى R و الثوابت a, b, c ليست جميعها أصفاراً . ويمكننا وضع الجزء $ax^2 + 2bxy + cy^2$ على الصورة المصفوفية :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = [x \quad y]\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

وتُسمى هذه الصورة بـ **الصيغة التربيعية** ***Quadratic Form*** في متغيرين . وهـذه الصيغـة يمكـن كتابتها على الصورة $q(x) = \underline{x}^T A\underline{x}$ حيث $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، A مصفوفة متماثلة حقيقية *Real Symmetric Matrix* .

ويجدر الإشارة إلى أن هذه الصورة تُسمى أيضاً بـ **القطاعات المخروطية** ***Conic Sections*** وذلك لأن مُعظم الأشكال القطاعية تأتي من تقاطع مستوى مع **مخـروط دائـري قـائم مـزدوج** ***Right Circular Cone with Two Nappes*** على حسب الأشكال المبينة .



قطع زائد ***Hyperbola***

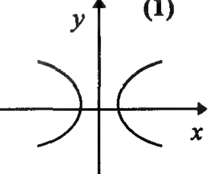
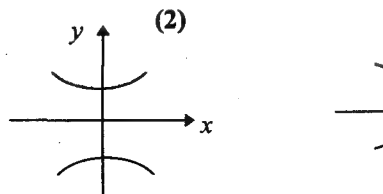
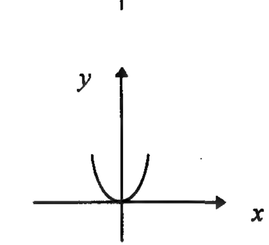
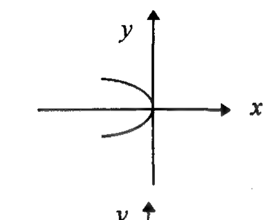
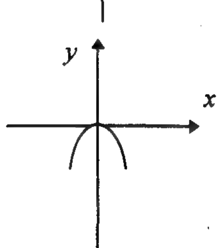


قطع مُكافئ ***Parabola***

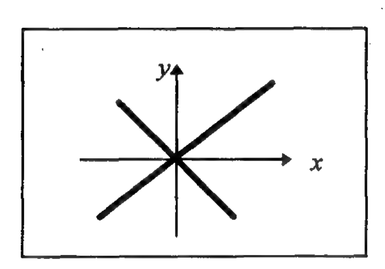


قطع ناقص ***Ellipse***

وبوضع المحاور في المكان المناسب فإن الصورة المُبسطة للمعادلات تكون كالتالي :

<table>
<tr>
<td>قطع ناقص :
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$</td>
<td colspan="2"></td>
</tr>
<tr>
<td>قطع زائد :
(1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
(2) $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>قطع مُكافئ :
$\leftarrow y^2 = kx$
و
$\leftarrow x^2 = ky$</td>
<td>$k > 0$
</td>
<td>$k < 0$
</td>
</tr>
</table>

ومن الممكن أن تُمثل الصيغة التربيعية خطين مستقيمين أو تُمثل نقطة أو تُمثل منحنى تخيلي . **فمثلاً** المعادلة



$$x^2 - y^2 = 0$$

تُمثل خطين مستقيمين وذلك لأن

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-y)(x+y) = 0$$

وبالتالي

$$x - y = 0 \quad , \quad x + y = 0$$

في حين أن المعادلة

$$x^2 + y^2 = 0$$

تُمثل نقطة (لأنها لا تتحقق إلا للنقطة (0,0) فقط) . أما إذا إعتبرنا المعادلة

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

نجد أنها تُمثل منحنى تخيلي (لأنها لا تتحقق لأية نقطة وبالتالي لا يمكن رسمها في المستوى الحقيقي)

.

مثال : بين ما إذا كانت المعادلة الآتية تمثل قطاعاً مخروطياً أم لا :

$$3x^2 - 2y^2 - 18x + 8y + 13 = 0$$

الحل :

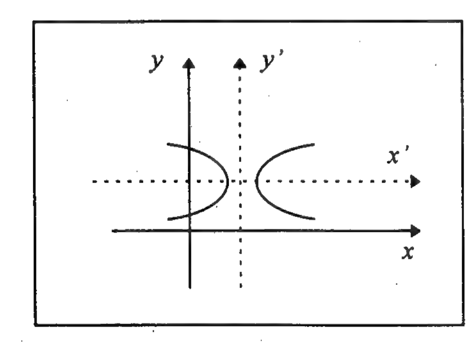
$$\begin{aligned} 0 &= 3x^2 - 2y^2 - 18x + 8y + 13 \\ &= (3x^2 - 18x) - (2y^2 - 8y) + 13 \\ &= 3(x^2 - 6x + \underline{9}) - 2(y^2 - 4y + \underline{\underline{4}}) + 13 - 3(\underline{9}) + 2(\underline{\underline{4}}) \\ &= 3[\underbrace{x-3}_{x'}]^2 - 2(\underbrace{y-2}_{y'})^2 - 6 \\ &= 3x'^2 - 2y'^2 - 6 \end{aligned}$$

حيث:

$$x' = x - 3 \quad , \quad y' = y - 2$$

أي أن

$$3x^2-2y^2-18x+8y+13=0 \Rightarrow 3x'^2-2y'^2=6 \Rightarrow \frac{x'^2}{2}-\frac{y'^2}{3}=1$$



وهي معادلة **قطع زائد** مركزه النقطة (3,2) كما هـــو مبين بالشكل . وأحيل القـــارئ المهتـــم إلى (Thomas *G.B. and Finney R.L*, 1984) لمزيد من التفصيلات .

ويمكننا دائماً الحصول على الأشكال القياســـية بنقل أو دوران المحاور .. أما عن نقل المحاور فميسر على القارئ بتصرف يسير مثل الـــذي قدمنـــاه في المثـــال السابق .. وبالنسبة لدوران المحاور فمن المهـــم معرفـــة كيـــف يمكـــن تحديـــد زاويـــة الـــدوران *Rotation Angle* ؟ . ويمكننا عمل ذلك على النحو التالي :

بكتابة المعادلة في الصورة المصفوفية

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+f=0$$

أي أن

$$x^T Ax+Bx+f=0$$

ومن المعلوم أن A مصفوفة متماثلة ، ولذلك يمكن جعلها قطرية *Diagonalizable* .. أي أن

$$P^T AP=D_\lambda$$

حيث P هي المصفوفة الظاهرية *Modal Matrix* والتي تحتوي علـــى المتجهـــات الذاتيـــة المتعـــامدة $v_1,v_2,\cdots,v_n$ (لماذا ؟) المصاحبة للقيم الذاتية $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ للمصفوفة A . ومـــن المعلـــوم (أنظـــر التطبيق الخامس) أن

$$\underline{x}=P\underline{x}' \quad , \quad \underline{x}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \underline{x}'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

وبالتالي :

$$\underline{x}^T A\underline{x}=(P\underline{x}')^T A(P\underline{x}')=\underline{x}'^T P^T AP\underline{x}'=\underline{x}'^T D_\lambda \underline{x}'=\lambda\, x'^2+\lambda_2 y'^2$$

حيث

$$D_\lambda=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

وهذا يُثبت النظرية التالية :

نظرية :

دع $q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ صيغة تربيعية حيث $A = A_{2\times2}$ متماثلة ، فإنــــه يُوجد دوران يؤدي إلى إنعدام الحد البيني *Cross Term* بحيث يكون

$$q(\underline{x}') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

حيث λ_1, λ_2 هي القيم الذاتية لــ A و

$$\underline{x} = P\underline{x}' \quad , \quad P = [v_1 \quad v_2]$$

و v_1, v_2 هي المتجهات الذاتية المتوحـــدة لـــــ A بحيـــث يكـــون $P^T = P^{-1}$ وكذلك تكون

$$\tan 2\theta = \frac{2b}{a-c}$$

حيث

$$P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

ملاحظات :

(١) المعادلة بعد الدوران تُصبح

$$\underline{x}^T A\underline{x} + B\underline{x} + f = O \quad \Rightarrow \quad \underline{x}'^T \left(P^T AP\right)\underline{x} + BP\underline{x}' + f = 0$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d'x' + e'y' + f = 0$$

حيث
$$BP = [d \quad e]P = [d' \quad e']$$

مع عدم تغيير المعامل الثابت f للمعادلتين .

(٢) إذا كانت λ_1, λ_2 لهما نفس الإشارة فإن الناتج يكون معادلة قطع ناقص .. وإذا كانت لهمـــا إشارتين متعاكستين فإن الناتج يكون قطعاً زائداً .. وإذا كانت إحداهما فقط صفراً فـــإن القطع يكون قطعاً مُكافئاً .

(٣) لاحظ أيضاً أن

$$a + c = a' + c' \quad , \quad b^2 - ac = b'^2 - a'c'$$

وذلك لأن

$$|A - \lambda I| = 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - (a+c)\lambda - (b^2 - ac) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a+c)^2 + 4(b^2 - ac)}}{2}$$
$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = a + c, \lambda_1\lambda_2 = -(b^2 - ac)$$

مثال : حدد شكل القطاع المخروطي الذي تُمثله المعادلة

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 15x - 20y = 0$$

الحل :

$$16x^2 + 24xy + 9y^2 + 15x - 20y = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 16 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} \\ B = [15 \quad -20] \\ \lambda_1 = 25 \\ \lambda_2 = 0 \\ v_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \\ v_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \end{cases}$$

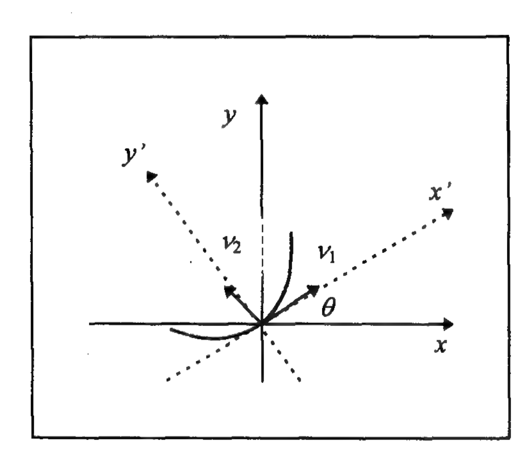
وبالتالي فإن

$$P = [v_1 \quad v_2] = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad P^T A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ومنها :

$$\underline{x}'^T A \underline{x}' = [x' \quad y']\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 25x'^2$$
$$BP\underline{x}' = [15 \quad -20] \times \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -25y'$$

وبالتالي تأخذ المعادلة



$$16x^2+24xy+9y^2+15x-20y=0$$

الصورة

$$25x'^2-25y'=0$$

أو
$$y'=x'^2$$

وهي معادلة قطع مُكافىء . وتتحدد زاوية الدوران θ من

$$\tan 2\theta=\frac{24}{16-9}=\frac{24}{7}\Rightarrow\theta\cong 36.87°$$

لاحظ أن θ يمكن حسابها أيضاً من عناصر المتجه v_1 حيث $\tan\theta=\frac{3}{4}$

مثال : حدد شكل القطاع المخروطي الذي تُمثله المعادلة

$$34x^2-24xy+41y^2-40x-30y-25=0$$

الحل :

$$34x^2-24xy+41y^2-40x-30y-25=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} A=\begin{bmatrix}34 & -12\\ -12 & 41\end{bmatrix}\\ B=\begin{bmatrix}-40 & -30\end{bmatrix}\\ \lambda_1=25\\ \lambda_2=50\\ v_1=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}\\ v_2=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}\end{cases}$$

وبالتالي فإن

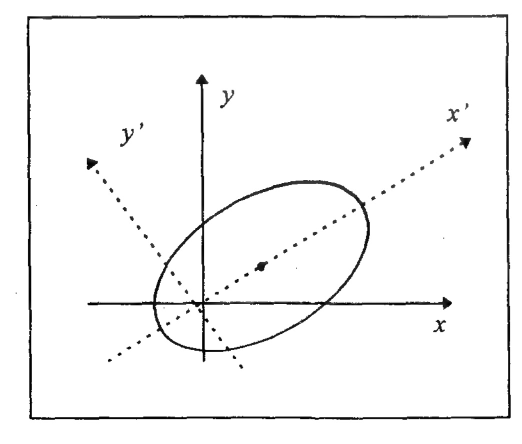
$$P=\begin{bmatrix}v_1 & v_2\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\3 & 4\end{bmatrix},\quad P^TAP=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25 & 0\\0 & 50\end{bmatrix}$$

ومنها :

$$\underline{x}'^T A\underline{x}' = \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = 25x'^2 + 50y'^2$$

$$BP\underline{x}' = \begin{bmatrix} -40 & -30 \end{bmatrix} \times \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = -50x'$$

وبالتالي تأخذ المعادلة



$$34x^2 - 24xy + 41y^2 - 40x - 30y - 25 = 0$$

الصورة

$$25(x'-1)^2 + 50y'^2 = 50$$

أو

$$\frac{(x'-1)^2}{2} + \frac{y'^2}{1} = 1$$

وهي معادلة قطع ناقص . وتتحدد الزاوية θ من عناصر المتجه v_1 حيث

$$\tan\theta = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta \cong 36.87^\circ$$

أي أن المعادلة

$$34x^2 - 24xy + 41y^2 - 40x - 30y - 25 = 0$$

تُمثل قطع ناقص محوره x' يدور بزاوية 36.87° عن محور x ومركزه النقطة $(1,0)$ على المحاور $(x'y')$.

مثال : أثبت أنه إذا كان $b^2 - ac = 0$ فإن المعادلة $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ تُمثل قطعاً مُكافئاً .

الحل :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

القيم الذاتية للمصفوفة A تتحدد من

$$|A-\lambda I|=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$$
$$\Rightarrow\quad (a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0$$
$$\Rightarrow\quad \lambda^2-(a+c)\lambda-(b^2-ac)=0$$
$$\Rightarrow\quad \lambda_{1,2}=\frac{(a+c)\pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2}$$

وحتى تكون المعادلة $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ ممثلة لقطع مُكافيء ، يجـــب أن تكـــون إحدى القيم الذاتية (λ_1 مثلاً) صفراً (لكن ليست القيمتين معاً) . دع

$$\lambda_1=\frac{(a+c)-\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2}=0$$
$$\Rightarrow\quad (a+c)=\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}$$
$$\Rightarrow\quad (a+c)^2=(a+c)^2-4(ac-b^2)$$
$$\Rightarrow\quad ac-b^2=0 \quad\Rightarrow\quad b^2-ac=0$$

ماذا إذا أخذنا الإحتمال الآخر ($\lambda_2=0$) ؟ .

تمرين :

أثبت أن المعادلة $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ تُمثل قطعاً زائداً إذا كان $b^2-ac>0$ في حين تُمثل قطعاً ناقصاً إذا كان $b^2-ac<0$.

٥-٦-٢ تعميم *Generalization*

والآن دعنا نُعمم النتائج التي حصلنا عليها سابقاً :

نظرية :

دع $q(\underline{x})=\underline{x}^T A\underline{x}$ صيغة تربيعية حيث $A\in R^{n\times n}$ والمتماثلة ، ودع P بحيث $P^TAP=D_\lambda$ ، فإن $\underline{x}=P\underline{x}'$ يُحول الصيغة إلى الآتي :

$$q(\underline{x}')=\lambda_1(x_1')^2+\lambda_2(x_2')^2+\cdots\cdots+\lambda_n(x_n')^2$$

حيث $\{\lambda_i\}$ هي مجموعة القيم الذاتية للمصفوفة A .

الإثبات :

$$q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x} = (P\underline{x}')^T A(P\underline{x}') = \underline{x}'^T D_\lambda \underline{x}' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i')^2$$

وتُسمى هذه النظرية بنظرية المحاور الأساسية للصيغة التربيعية ***Theorem of Principal Axes of a Quadratic Form*** .

تعريفات :

(١) إذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A موجبة ، فإن $q(\underline{x}) > 0$ إلا إذا كان $\underline{x} = O$ .. وتُسمى الصيغة التربيعية $q(\underline{x})$ في هذه الحالة موجبة تحديداً ***Positive Definite*** .

(٢) وإذا كانت جميع القيم الذاتية للمصفوفة A سالبة ، فإن $q(\underline{x}) < 0$ إلا إذا كان $\underline{x} = O$ .. وتُسمى الصيغة التربيعية $q(\underline{x})$ في هذه الحالة سالبة تحديداً ***Negative Definite*** .

(٣) وإذا كانت القيم الذاتية للمصفوفة A غير محددة الإشارة ، فإن الصيغة التربيعية $q(\underline{x})$ تكون غير محددة أيضاً .

(٤) وتُسمى q بأنها شبه موجبة تحديداً ***Positive Semi-Definite*** إذا كانت ($\lambda_i \geq 0, \forall i$) .

(٥) وتُسمى q بأنها شبه سالبة تحديداً ***Negative Semi-Definite*** إذا كانت ($\lambda_i \leq 0, \forall i$) .

(٦) وتُسمى q بأنها غير منحلة ***Non-Degenerate*** إذا كان ($\lambda_i \neq 0, \forall i$) وذلك لأن $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ وبالتالي فإن $|A| \neq 0$ إذا كان ($\lambda_i \neq 0, \forall i$) .

فمثلاً :

* الصيغة التربيعية : $q(x,y,z)=2x^2+5y^2+2z^2+2xz$

موجبة تحديداً لأن لها

$$A=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&5&0\\1&0&2\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1=5 \quad , \quad \lambda_2=3 \quad , \quad \lambda_3=1 \Rightarrow \lambda_i>0\forall i$$

* والصيغة التربيعية : $q(x,y,z)=6xy+8yz$

غير محددة لأن لها

$$A=\begin{bmatrix}0&3&0\\3&0&4\\0&4&0\end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1=0 \quad , \quad \lambda_2=5 \quad , \quad \lambda_3=-5$$

مثال : أثبت أن الصيغة التربيعية $q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=0$ تكون :

(١) موجبة تحديداً إذا كان ($a>0,\Delta=ac-b^2>0$) .

(٢) سالبة تحديداً إذا كان ($a<0,\Delta=ac-b^2>0$) .

(٣) غير محددةً إذا كان ($\Delta=ac-b^2<0$) .

الإثبات :

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta=|A|=ac-b^2=\lambda_1\lambda_2 \Rightarrow ac=b^2+\Delta=b^2+\lambda_1\lambda_2$$

فإذا كانت Δ موجبة (أي $\Delta>0$) فهذا يعني أن $ac>0$ (لأن $b^2\geq 0$) وبالتالي فإن c , a لهما نفس الإشارة . كذلك λ_1,λ_2 لهما نفس الإشارة (لأن $\Delta=\lambda_1\lambda_2>0$) . ولكن من المعلوم أن

$$a+c=\lambda_1+\lambda_2=tr(A)$$

إذن λ_1,λ_2,a,c لها جميعاً نفس الإشارة . فإذا كانت :

(١) ($a>0,\Delta=ac-b^2>0$) فهذا يعني أن ($\lambda_1,\lambda_2>0$) وبالتالي تكون q موجبة تحديداً .

(٢) ($a<0,\Delta=ac-b^2>0$) فهذا يعني أن ($\lambda_1,\lambda_2<0$) وبالتالي تكون q سالبة تحديداً .

(٣) أما إذا كانت $\Delta<0$ ، فهذا يعني أن λ_1, أو λ_2 سالبة .. أي أن λ_1,λ_2 لهما إشارات مختلفة وبالتالي تكون q غير محددة

ويُمهد المثال السابق للنظرية الآتية . لكن قبل أن نعرض النظرية سنُعرِّف الآتي :

تعريف :

إذا كانت A مصفوفة مربعة فإن المحدد

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2k} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

يُعرف على أنه المحدد للعناصر العليا اليسرى من المصفوفة A .

أي أن

$$\Delta_1 = a_{11} \quad , \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad , \quad \cdots\cdots \quad , \quad \Delta_n = |A|$$

نظرية :

إذا كان $q(\underline{x}) = \underline{x}^T A \underline{x}$ صيغة تربيعية حيث $\underline{x} \in R^n$ و A مصفوفة متماثلة ، فإن :

* **q تكون موجبة تحديداً إذا وإذا فقط كان ($\Delta_k > 0, \forall k$) .**
* **q تكون سالبة تحديداً إذا وإذا فقط كـــان ($(-1)^k \Delta_k < 0, \forall k$)**
  .. أي إذا كانت ($\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \Delta_4 > 0, \cdots$) .
* **q تكون غير محددة إذا كان Δ_k موجباً أحياناً وسالباً أحياناً .**

ولا يمكن تحديد شيء ما إذا كان $|A| = 0$ (حالة تحلل *Degenerate*)

فمثلاً إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -3 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5 \\ \Delta_3 = |A| = -10 \end{cases}$$

وبالتالي فإن : $q(x,y,z) = -3x^2 - 2y^2 - 5z^2 + 2xy + 4xz + 2yz$

تكون سالبة تحديداً . في حين أن :

$$B=\begin{bmatrix}3&2&1\\2&2&3\\1&3&2\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\Delta_1=3\\ \Delta_2=\begin{vmatrix}3&2\\2&2\end{vmatrix}=2\\ \Delta_3=|B|=-13\end{cases}$$

وبالتالي فإن : $q(x,y,z)=3x^2+2y^2+2z^2+4xy+2xz+6yz$

تكون غير محددة . أما بالنسبة لـــ :

$$C=\begin{bmatrix}1&-1&2&1\\-1&3&0&-3\\2&0&9&-6\\1&-3&-6&19\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\Delta_1=1\\ \Delta_2=\begin{vmatrix}1&-1\\-1&3\end{vmatrix}=2\\ \Delta_3=\begin{vmatrix}1&-1&2\\-1&3&0\\2&0&9\end{vmatrix}=4\\ \Delta_4=|C|=24\end{cases}$$

وبالتالي فإن

$$q(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+3x_2^2+9x_3^2+19x_4^2-2x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4-6x_2x_4-12x_3x_4$$

تكون موجبة تحديداً .

٥-٧ التطبيق السابع : حل نظم من المعادلات غير الخطية :

إذا ما تعددت المعادلات غير الخطية وحصلنا على نظم من المعادلات غير الخطية ***nonlinear system of equations*** ، فإننا يجب أن نلجأ إلى المصفوفات لتُعيننا على الحل .. ودعنا نُعـــدد بعـــض الطرق في هذا المجال .

٥-٧-١ : طريقة نيوتن *Newton Method*

إذا كانت $\left(f_j(x)=0\,,\,x\in R^n\,,\;j=1,2,\cdots,n\right)$ فإن حـــل هـــذا النظم من المعادلات (غير الخطية) يكون بالتكرار :

$$x^{(1)} = x^{(0)} - J^{-1}\left(x^{(0)}\right)f\left(x^{(0)}\right)$$

حيث $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ نظم من الدوال المُعطاة .

ولإثبات ذلك :

دع

$$f_j(x) = 0 \quad , \quad j = 1,2,\cdots,n$$

نظم من المعادلات غير الخطية في x حيث $x \in R^n$ ، ودعنا نفرض أن $f_j(x)$ دالة متصلة وقابلة للإشتقاق جزئياً بالنسبة لعناصر x في فترة ما .. نتيجة لذلك فإنه يمكننا فك $f_j(x)$ حول نقطة $x^{(0)}$ في هذه الفترة باستعمال مفكوك تيلور كالآتي :

$$f\left(x^{(1)}\right) = f\left(x^{(0)}\right) + f'\left(x^{(0)}\right)\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right) + R = 0$$

حيث $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ نظم من الدوال ($f_j, j = 1,2,\cdots,n$) و R هو حد يُعبر عن باقي حدود المتسلسلة .. دع $x^{(0)}$ قريبة من الحل $x^{(1)}$ بحيث يمكن إهمال R ، وبالتالي فإن :

$$f\left(x^{(0)}\right) + f'\left(x^{(0)}\right)\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right) = 0$$

أي أن

$$x^{(1)} = x^{(0)} - f'^{-1}\left(x^{(0)}\right)f\left(x^{(0)}\right)$$

هذا بفرض وجود $f'^{-1}\left(x^{(0)}\right)$. يُسمى $f'\left(x^{(0)}\right)$ بـ **الجاكوبيان *Jacobian*** وعادةً يُرمز له بالرمز J ويُحسب كالآتي :

$$J(x) = f'(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left[J_{jk}\right] = \left[\frac{\partial f_j(x)}{\partial x_k}\right] \quad , \quad j,k = 1,2,\cdots,n$$

وعلى هذا الأساس يمكن القول بأن :

$$x^{(1)} = x^{(0)} - J^{-1}\left(x^{(0)}\right)f\left(x^{(0)}\right)$$

وتتقارب طريقة نيوتن إذا كان الحل التقريبي $x^{(0)}$ قريباً من الحل $x^{(1)}$ (لمزيد من المعلومات عن التقارب إرجع لـ *Stunmel F. and Hainer K.*, 1980) .

مثال : حل المعادلات

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0$$

إعتبر $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$.

الحل :

$$J = \begin{bmatrix} 3 & x_3\sin(x_2x_3) & x_2\sin(x_2x_3) \\ 2x_1 & -162(x_2+0.1) & \cos x_3 \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

وبحل المعادلات $Jy = -f$ نحصل على $y = -J^{-1}f$ وذلك عند النقطة $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}$ ثم نكون الحل التقريبي :

$$x^{(1)} = x^{(0)} + y$$

ونأخذه كقيمة إبتدائية $x^{(0)}$ ونعيد الكرّة مرةً أخرى للحصول على حـــلٍ تقريـــبي آخـــر $x^{(1)}$ .. وهكذا . والجدول التالي يُوضح تقارب الحل : (مأخوذ من *Burden R.L. and Faires J.D.* , 1993).

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
0	0.1	0.1	-0.1
1	0.50003702	0.01946686	-0.52152047
2	0.50004593	0.00158859	-0.52355711
3	0.50000034	0.00001244	-0.52359845
4	0.50000000	0.00000000	-0.52359877
5	0.50000000	0.00000000	-0.52359877

ملاحظة : لاحظ أن الخطأ في الخطوة n يكون في حدود مربع الخطأ في الخطوة n-1 ، لذا يُسمى التقارب في هذه الحالة بالتقارب التربيعي . كذلك يُوضح المثال السابق أن طريقة نيوتن تتقارب بسرعة وذلك إذا ما كانت القيمة الإبتدائية المأخوذة قريبة من الحل السليم .. ولكن هل يمكننا دائماً الحصول على هذه القيمة الإبتدائية القريبة من الحل ؟ . يجب أن نشك في ذلك .

٥-٧-٢ طريقة برويدن *Broyden Method* :

في طريقة نيوتن هناك عدة مشاكل في الحسابات خاصةً عندما تكون n كبيرة .. منها حساب الجاكوبيان في كل خطوة ثم حساب المعكوس له وحل نظم المعادلات $Jy=-f$ بما فيه من مشاكل . لتجنب هذه المشكلة إقترح **برويدن** الطريقة التالية :

* يتم حساب $x^{(1)}$ كما في طريقة نيوتن :

$$x^{(1)} = x^{(0)} - J^{-1}\left(x^{(0)}\right) f\left(x^{(0)}\right)$$

* ثم يتم إستعمال مصفوفة A_1 بدلاً من $J\left(x^{(1)}\right)$ تُغني عن الجاكوبيان (*Dennis & More*, 1973) حيث :

$$A_1 = J\left(x^{(0)}\right) + \frac{\left[f\left(x^{(1)}\right) - f\left(x^{(0)}\right) - J\left(x^{(0)}\right)\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right)\right]\left(x^{(1)} - x^{(0)}\right)^T}{\left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_2^2}$$

وذلك للحصول على

$$x^{(2)} = x^{(1)} - A_1^{-1} f\left(x^{(1)}\right)$$

* ثم تُكرر الخطوة الثانية للحصول على $x^{(3)}, x^{(4)}, \ldots$ من خلال التكرار

$$x^{(i+1)} = x^{(i)} - A_i^{-1} f\left(x^{(i)}\right) \quad , \quad i \geq 1$$

حيث

$$A_i = A_{i-1} + \frac{\left[f\left(x^{(i)}\right) - f\left(x^{(i-1)}\right) - A_{i-1}\left(x^{(i)} - x^{(i-1)}\right)\right]\left(x^{(i)} - x^{(i-1)}\right)^T}{\left\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\right\|_2^2} \quad , \quad i \geq 1 \quad , \quad A_0 = J\left(x^{(0)}\right)$$

وبذلك يقل المجهود اللازم لحساب $J\left(x^{(i)}\right)$ كل مرة .. ولكن مازال علينا حل المعادلات

$$A_i y_i = -f\left(x^{(i)}\right)$$

وهي حسابات في حدود n^3 ($O\left(n^3\right)$) . أي أننا مازلنا في إحتياج لحساب A_i^{-1} بشكلٍ أو بآخر .

وللقضاء على هذه الصعوبة إقترح (Dennis & More , 1973) صيغة أخرى تقريبية تربط معكوس A_i بمعكوس A_{i-1} كالتالي :

$$A_i^{-1} = A_{i-1}^{-1} + \frac{\left(s_i - A_{i-1}^{-1} y_i\right) s_i^T A_{i-1}^{-1}}{s_i^T A_{i-1}^{-1} y_i}$$

حيث

$$s_i = x^{(i)} - x^{(i-1)}$$
$$y_i = f\left(x^{(i)}\right) - f\left(x^{(i-1)}\right)$$

والقارئ المهتم ببعض التفصيلات الخاصة بهذا الموضوع أحيله إلى الباب العاشر في كتاب (Burden R.L , 1993) .

مثال :حل المثال السابق (والذي سبق حله بطريقة نيوتن) وذلك بطريقة برويدن .

الحل :

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - \cos\left(x_2 x_3\right) - \frac{1}{2} = 0 \\ x_1^2 - 81\left(x_2 + 0.1\right)^2 + \sin x_3 + 1.06 = 0 \\ e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \frac{10\pi - 3}{3} = 0 \end{array} \quad , \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix} \right\rangle \Rightarrow$$

$$A_0 = J\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin\left(x_2 x_3\right) & x_2 \sin\left(x_2 x_3\right) \\ 2x_1 & -162\left(x_2 + 0.1\right) & \cos x_3 \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix}_{x^{(0)}} \quad , \quad A_0^{-1} = J^{-1}\left(x^{(0)}\right)$$

ومنها

$$x^{(1)} = x^{(0)} - A_0^{-1} f\left(x^{(0)}\right) = \begin{bmatrix} 0.4998693 \\ 1.946693 \times 10^{-2} \\ -0.5215209 \end{bmatrix}$$

وبالتالي

$$y_1 = f\left(x^{(1)}\right) - f\left(x^{(0)}\right)$$
$$s_1 = x^{(1)} - x^{(0)}$$
$$s_1^T A_0^{-1} y_1 = 0.3424604$$
$$A_1^{-1} = A_0^{-1} + \frac{1}{0.3424604}\left[\left(s_1 - A_0^{-1} y_1\right) s_1^T A_0^{-1}\right]$$

ثم

$$x^{(2)} = x^{(1)} - A_1^{-1} f\left(x^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} 0.4999863 \\ 8.737888 \times 10^{-3} \\ -0.5231746 \end{bmatrix}$$

والجدول التالي يُوضح التقارب العددي لهذا المثال .

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
0	0.1	0.1	-0.1
1	0.4998693	0.01946693	-0.5215209
2	0.4999863	0.008737888	-0.5231746
3	0.5000066	0.0008672215	-0.5236918
4	0.5000005	0.00006087473	-0.5235954
5	0.5000002	-0.000001445223	-0.5235989

وواضح من هذا المثال أننا سهلنا الحسابات ولكن على حساب التقارب السريع للحل .

الحمد لله رب العالمين

ملحق أ

APPENDIX A

Jacobi Algorithm

```
10 REM Jacobi algorithm
15 INPUT "The dimension";N
17 DIM A(N,N),X(N),X0(N)
20 PRINT "The coefficient matrix"
30 FOR I=1 TO N
35 PRINT "The coefficient matrix,row by row"
40   FOR J=1 TO N
50     INPUT A(I,J)
60   NEXT J
70 NEXT I
80 PRINT "The constant vector,b"
90 FOR I=1 TO N :INPUT B(I) :NEXT I
95 PRINT "The initial guess"
97 FOR I=1 TO N :INPUT X0(I) :NEXT I
100 INPUT "The tolerance";TOL
110 INPUT "The no. of iterations";M
120 FOR K=1 TO M
130   FOR I=1 TO N
140     U=0 :FOR J=1 TO I-1 :U=U+A(I,J)*X0(J) :NEXT J
150     V=0 :FOR J=I+1 TO N :V=V+A(I,J)*X0(J) :NEXT J
160       X(I)=(B(I)-U-V)/A(I,I)
170   NEXT I
180     FOR I=1 TO N :IF ABS(X(I)-X0(I)) >TOL THEN 300 ELSE NEXT I
190 PRINT "The solution"
200 FOR I=1 TO N :PRINT X(I), :NEXT I
210 STOP
300      FOR I=1 TO N :X0(I)=X(I) :NEXT I
310     NEXT K
320 PRINT "The no. ofiterations are exceeded"
330 FOR I=1 TO N :PRINT X(I), : NEXT I
```

SOR Algorithm

```
10 REM SOR ALGORITHM
20 INPUT "The number of equations";N
30 DIM A(N,N),B(N),X0(N)
35 PRINT "The coefficient matrix,row by row"
40 FOR I=1 TO N
50  FOR J=1 TO N
60   INPUT A(I,J)
70  NEXT J
80 NEXT I
90 PRINT "The constant vector b"
100 FOR I=1 TO N:INPUT B(I):NEXT I
110 PRINT "The initial vector x0"
120 FOR I=1 TO N:INPUT X0(I) :NEXT I
130 INPUT "The relaxation parameter w";W
140 INPUT "The tolerance tol";TOL
150 INPUT "The maximum number of iterations";M
160 FOR K=1 TO M
170   FOR I=1 TO N
180     U=0: FOR J=1 TO I-1 :U=U+A(I,J)*X(J) :NEXT J
190     V=0: FOR J=I+1 TO N :V=V+A(I,J)*X0(J) :NEXT J
200      X(I)=(1-W)*X0(I)+W*(-U-V+B(I))/A(I,I)
210   NEXT I
220   FOR I=1 TO N
230      IF ABS(X(I)-X0(I)) >TOL THEN 400 ELSE NEXT I
300    PRINT " The solution"
310    FOR I=1 TO N :PRINT X(I), :NEXT I
320    STOP
400   FOR I=1 TO N :X0(I)=X(I):NEXT I
410   NEXT K
420 PRINT "Maximum number of iterations exceeded"
430 FOR I=1 TO N :PRINT X(I), :NEXT I
```

Power Method Algorithm

```
10 REM Power Method Algorithm
20 INPUT "The dimension";N
30 DIM A(N,N),X(N),Y(N),R(N)
40 PRINT "The matrix,row by row"
50 FOR I= 1 TO N
60   FOR J=1 TO N
70    INPUT A(I,J)
80   NEXT J
90 NEXT I
100 PRINT "The vector x,with infinite-norm unity"
110 FOR I=1 TO N: INPUT X(I) :NEXT I
120 INPUT "tolerance";TOL
130 INPUT "the max. no. of iterations";M
135 FOR I=1 TO N
136   IF X(I) <> 1 THEN 138 ELSE P=I :GOTO 140
138 NEXT I
140 FOR K=1 TO M
150    FOR I=1 TO N
155 Y(I)=0
160        FOR J=1 TO N
170          Y(I)=Y(I)+A(I,J)*X(J)
180        NEXT J
190    NEXT I
200 MU=Y(P)
205   MAX=Y(1) :P=1
210       FOR I=2 TO N
220         IF MAX >= Y(I) THEN 250
230           MAX=Y(I) :P=I
250       NEXT I
260 IF MAX=0 THEN 270 ELSE 295
270 PRINT "A has 0 as an eigenvalue "
275 PRINT "eigenvector:"
280 FOR I=1 TO N :PRINT X(I), :NEXT I
290 STOP
295 FOR I=1 TO N :R(I)=X(I)-Y(I)/MAX :NEXT I
300 FOR I=1 TO N :X(I)=Y(I)/Y(P) :NEXT I
310   MAX=R(1)
320        FOR I=2 TO N
330            IF MAX >=R(I) THEN 360
340                MAX=R(I)
360        NEXT I
370   E=ABS(MAX)
380 IF E <= TOL THEN 400 ELSE 390
390 NEXT K
392 PRINT "Max. no. of iterations exceeded"
394 STOP
400 PRINT "dominant eigenvalue";MU
410 PRINT "corresponding eigenvector";
420 FOR I=1 TO N :PRINT X(I), :NEXT I
430 STOP
```

Householder Algorithm

```
5 REM Householder Algorithm
7 REM     A(N,N),SYMMETRIC   TO   TRIDIAGONAL MATRIX
10 INPUT "The dimension:";N
20 DIM A(N,N),V(N),U(N),Z(N)
21 PRINT "The matrix A: row by row"
22 FOR I=1 TO N
24   FOR J=1 TO N
25    INPUT A(I,J)
27 NEXT J
29 NEXT I
30 FOR K=1 TO N-2
35 Q=0
40      FOR J=K+1 TO N  :Q=Q+A(J,K)*A(J,K) :NEXT J
50 IF A(K+1,K)=0 THEN ALPHA=-SQR(Q) ELSE ALPHA=-SQR(Q)*A(K+1,K)/ABS(A(K+1,
60 RSQ=ALPHA*ALPHA-ALPHA*A(K+1,K)
70 V(K)=0
80 V(K+1)=A(K+1,K)-ALPHA
90 FOR J=K+2 TO N :V(J)=A(J,K) :NEXT J
100 FOR J=K TO N :U(J)=0 :FOR I=K+1 TO N :U(J)=U(J)+A(J,I)*V(I) :NEXT I
102                 U(J)=U(J)/RSQ : NEXT J
105 PROD=0:FOR I=K+1 TO N: PROD=PROD+V(I)*U(I): NEXT I
110 FOR J=K TO N :Z(J)=U(J)-PROD*V(J)/2/RSQ : NEXT J
120   FOR L=K+1 TO N-1
130        FOR J=L+1 TO N
140           A(J,L)=A(J,L)-V(L)*Z(J)-V(J)*Z(L)
150           A(L,J)=A(J,L)
155                NEXT J
160           A(L,L)=A(L,L)-2*V(L)*Z(L)
170    NEXT L
180 A(N,N)=A(N,N)-2*V(N)*Z(N)
190          FOR J=K+2 TO N
200               A(K,J)=0
210               A(J,K)=0
220          NEXT J
230 A(K+1,K)=A(K+1,K)-V(K+1)*Z(K)
240 A(K,K+1)=A(K+1,K)
250   NEXT K
260 FOR I=1 TO N
270  FOR J=1 TO N
280    PRINT A(I,J);
290 NEXT J
295 PRINT
300 NEXT I
```

QR-Algorithm

```
10 REM QR-Algorithm
20 REM       The eigenvalues of the Tridiagonal matrix
30 REM
40 INPUT "The dimension:";N
50 DIM A(N),B(N),R(N),Q(N),S(N),X(N),D(N),Y(N),Z(N),C(N)
60 PRINT "The diagonal elements;A(n)"
70 FOR M=1 TO N
80   INPUT A(M)
90 NEXT M
100 PRINT "The over diagonal elements;b(n)"
110 FOR I=2 TO N
120   INPUT B(I)
130 NEXT I
140 INPUT "tolerance:";TOL
150 INPUT "max. no. of iterations:";M
170 SHIFT=0
180 FOR K=1 TO M
190   IF ABS(B(N)) <=TOL THEN LAMDA=A(N)+SHIFT :PRINT "eigenvalue:";LAMDA :N=N-1
195 IF N=3 THEN 300
200      FOR J=3 TO N-1
210           IF ABS(B(J)) <= TOL THEN  NEXT J ELSE GOTO 300
230     PRINT "split into:"
235          FOR I=1 TO J-1 :PRINT A(I), :NEXT I
240          FOR I=2 TO J-1 :PRINT B(I), :NEXT I
245     PRINT "and :"
250          FOR I=J TO N   :PRINT A(I), :NEXT I
260          FOR I=J+1 TO N :PRINT B(I), :NEXT I
270          PRINT "shift:";SHIFT
280     STOP
300   IF ABS(B(2)) <=TOL THEN LAMDA=A(1)+SHIFT :PRINT "eigenvalue:";LAMDA  :N=N-
                  1 :A(1)=A(2):FOR I=2 TO N:A(I)=A(I+1):B(I)=B(I+1):NEXT I
310 REM compute shift
320   B=-(A(N-1)+A(N))
330   C=A(N)*A(N-1)-B(N)*B(N)
340   D=SQR(B*B-4*C)
350      IF B>0 THEN MU1=-2*C/(B+D) :MU2=-(B+D)/2  ELSE MU1=(D-B)/2:MU2=2*C/(D-B
                                                      )
360      IF N=2 THEN  LAMDA1=MU1+SHIFT:LAMDA2=MU2+SHIFT:PRINT LAMDA1,LAMDA2:STOP
370   IF ABS(MU1-A(N))<=ABS(MU2-A(N)) THEN W=ABS(MU1-A(N)) ELSE W=ABS(MU2-A(N))
380      S=A(N)-W
390      SHIFT=SHIFT+S
400      FOR I=1 TO N :D(I)=A(I)-S:NEXT I
410       X(1)=D(1)
420       Y(1)=B(2)
430      FOR I=2 TO N:Z(I-1)=SQR(X(I-1)^2+B(I)^2):C(I)=X(I-1)/Z(I-1):S(I)=B(I)/Z
                  (I-1):Q(I-1)=C(I)*Y(I-1)+S(I)*D(I):X(I)=-S(I)*Y(I-1)+C(I)*
                  D(I):GOTO 440
440       IF I<>N THEN R(I-1)=S(I)*B(I+1):Y(I)=C(I)*B(I+1) ELSE 450
450       NEXT I
460    Z(N)=X(N)
470    A(1)=S(2)*Q(1)+C(2)*Z(1)
480    B(2)=S(2)*Z(2)
490   FOR I=2 TO N-1:A(I)=S(I+1)*Q(I)+C(I)*C(I+1)*Z(I):B(I+1)=S(I+1)*Z(I+1):NEXT
                  I
500   A(N)=C(N)*Z(N)
600 NEXT K
610   PRINT "Max. number of iterations exceeded;Procedure completed unsuccessful
ly"
620 END
```



1. Ayres F. , " *Matrices, Schaum's Outline Series* " , McGraw-Hill, New York, 1974.

2. Barenett S.. , " *Matrices Methods for Engineers and Scientists,* " , McGraw-Hill, London, 1979.

3. Bellman R. , " *Introduction to Matrix Analysis* " , McGraw-Hill, New York, 1953.

4. Ben Noble , " *Applied Linear Algebra* " , Prentice-Hall Inc., N.J., 1969.

5. Ben Noble and Daniel J.W. , " *Applied Linear Algebra* " , 2nd ed, Prentice-Hall Inc., N.J., 1977.

6. Brogen W.L. , " *Modern Control Theory* " , Quantum Pub. Inc., N.Y., 1974.

7. Bronson R., " *Matrix Methods* " , A.P., N.Y., 1970.

8. Burden R.L. and Faires J.D. , " *Numerical Analysis* " , 5th ed., PWS-Kent Pub.Comp., Boston, 1993.

9. Coddington E.A. and Levinson N. , " *Theory of Ordinary Differential Equations* " , McGraw-Hill, N.Y, 1955.

10. Deif A.S. , " *Advanced Matrix Theory for Scientists and Engineers* " , John Wiley & Sons, N.Y, 1982.

11. Dennis J.E. and More' J.J. , " *Quasi-Newton Methods : Motivation and Theory* " , SIAM Review, 19, No 1, p 582-606, 1973.

12. Edwards C.H. and Penney D.E. , " *Elementary Linear Algebra* " , Prentice-Hall, N.J, 1988.

13. Finkbeiner D.T., " *Introduction to Matrices and Linear Transformation* " , 3rd ed., Freeman and Company, San Francisco, 1978.

14. Forsythe, George E. and Moler C.B., " *Computer Solution of Linear Algebraic Systems* " , Prentice-Hall, N.J., 1967.

15. Franklin J.N., " *Matrix Theory* " , Prentice-Hall, N.J., 1968.

16. Frazer R.A., Duncan W.J. and Collar A.R., " *Elementary Matrices* " , Cambridge University Press, London, 1965.

17. Froberg C.E., " *Introduction to Numerical Analysis* " , 2nd ed., Addison-Wesley, Reading-Massachusetts, 1974.

18. Goult R.J., " *Applied Linear Algebra* " , Ellis Horwood LTD, Chichester, 1978.

19. Gourlay A.R. and Watson G.A., " *Computational Methods for Matrix Eigenproblems* " , John Wiley and Sons, N.Y., 1973.

20. Hohn P.E., " *Elementary Matrix Algebra* " , 3rd ed., The Macmillan Comp., N.Y., 1973.

21. Nearing E.D., " *Linear Algebra and Matrix Theory* " , Wiley, N.Y., 1967.

22. Pease M., " *Methods of Matrix Algebra* " , Academic Press, N.Y., 1965.

23. Searle S.R., " *Linear Models* " , John Wiley and Sons, N.Y., 1971.

24. Steinberg D.I., " *Computational Matrix Algebra* " , McGraw-Hill, N.Y., 1974.

25. Stummel F. and Hainer K., " *Introduction to Numerical Analysis* " , Scotish A.P., Edinburgh, 1980.

26. Thomas G.B. and Finney R.L., " *Calculus and Analytic Geometry* " , Addison-Wesley, Reading-Massachusetts, 1984.

27. Watkins D.S., " *Fundamentals of Matrix Computations* " , John Wiley and sons, N.Y., 1991.

28. Wylie C.R., " *Advanced Engineering Mathematics* " , 4th ed., McGraw-Hill, N.Y., 1975.


فهرست
INDEX